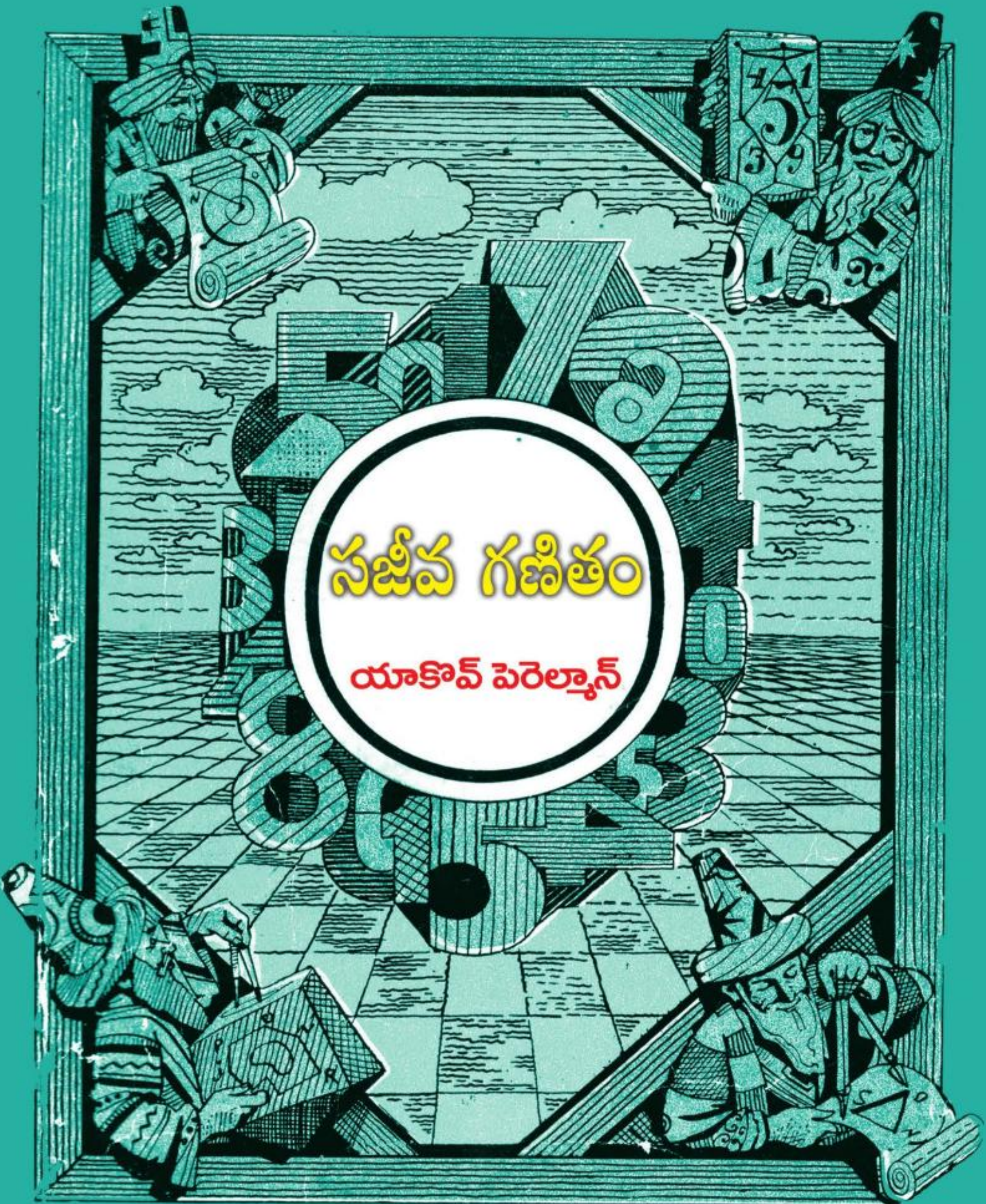


సజీవ గణితం

యాకొవ్ పెరెల్మాన్

నవతెలంగాణ పబ్లిషింగ్ హౌస్

సజీవ గణితం

యాకొవ్ పెరెల్మాన్

సజీవ గణితం

యాకొవ్ పెరెల్మాన్

<u>అనువాదం</u>

డా॥ మహీధర నళినీమోహన్

నవతెలంగాణ పబ్లిషింగ్‌హౌస్

ఎమ్‌హెచ్ భవన్, ప్లాట్ నెం. 21/1, అజామాబాద్, ఆర్‌టిసి కళ్యాణమండపం దగ్గర

హైదరాబాద్ -20, ఫోన్ : 040 - 27665420

130657

ప్రచురణ సంఖ్య : 1447

సోవియట్ ప్రచురణకు
నవతెలంగాణ ప్రథమ ముద్రణ : అక్టోబర్, 2017

వెల : ₹ 120/-

ప్రతులకు : నవతెలంగాణ పబ్లిషింగ్ హౌస్
ఎమ్.హెచ్. భవన్, ప్లాట్ నెం. 21/1, అజామాబాద్
ఆర్‌టిసి కళ్యాణమండపం దగ్గర, హైదరాబాద్ -20
ఫోన్ : 040 - 27665420

బ్రాంచీలు : నవతెలంగాణ పబ్లిషింగ్ హౌస్ బ్రాంచీలు
హైదరాబాద్ - చిక్కడపల్లి, బాగ్‌లింగంపల్లి (ఎస్.వి.కె.), ఇ.సి.ఐ.ఎల్.,
నల్గొండ, హన్మకొండ, ఖమ్మం, కరీంనగర్, నిజామాబాద్, మహబూబ్‌నగర్

ప్రజాశక్తి బుక్‌హౌస్ బ్రాంచీలు
విజయవాడ, గుంటూరు, విశాఖపట్నం, తిరుపతి, ఒంగోలు, నెల్లూరు,
ఏలూరు, కర్నూలు, విజయనగరం, కాకినాడ

ముద్రణ : నవతెలంగాణ ప్రింటర్స్ ప్రై. లిమిటెడ్, హైదరాబాద్

విషయసూచిక

తొలి పలుకు

ఈ పుస్తకం చదివి ఆనందించగలగడానికి సామాన్య గణిత పరిజ్ఞానమూ, కొద్దిగా క్షేత్ర గణిత ప్రవేశమూ చాలు. బీజ గణిత సమీకరణాలకు సంబంధించిన లెక్కలు ఇందులో బహు కొద్ది. అయినా అవి చాలా సులభమైనవి.

విషయ సూచికను చూస్తే, ఈ పుస్తకంలోని పాఠ్య వైవిధ్యం బోధపడుతుంది. చిక్కు ప్రశ్నలు, గణితంలో తమాషాల దగ్గర నుంచి కొలతలు, తూనికలు లెక్కించడంలో సులభ మార్గాల వరకూ ఇందులో కనిపిస్తాయి. "Tricks and Amusements, Interesting Problems" వంటి తన ఇతర గ్రంథాలలోని విషయాలు ఇందులో చర్విత చర్వణం కాకుండా రచయిత శ్రద్ధ తీసుకున్నాడు. సాధ్యమైనంత వరకూ కొత్త విషయాలే చూపించడానికి ప్రయత్నించాడు. ఇదివరకు ఏ పుస్తకాలలోనూ కనబడని చిక్కు ప్రశ్నలు వంద దాకా ఈ పుస్తకంలో కనబడతాయి. “రాక్షసి సంఖ్యలు” అనే ఆరవ ప్రకరణాన్ని రచయిత తన పూర్వపు చిన్న వ్యాసం నుంచి తీసుకుని, మరో నాలుగు కథలు అదనంగా చేర్చి తయారు చేశాడు.

1వ ప్రకరణం

భోజనాల వేళ మెదడుకి మేత

వర్షం కురుస్తోంది. మేమంతా అప్పుడే భోజనానికి కూర్చున్నాం. అంతలో అతిథులలో ఒకడు తనకు ఆనాటి ఉదయం కలిగిన చిత్రమైన అనుభవాన్ని వినిపించనా అని అన్నాడు. అందరూ సరేనని ఆసక్తి చూపించారు. అతడు ఈ విధంగా చెప్పనారంభించాడు.

1. పుంతలో ఉడుత

"ఉడుతతో చాలా సరదాగా దోబూచులాడాను" అని మొదలు పెట్టాడు. "ఈ చిట్టడవిలో ఖాళీ పుంత, మధ్యలో ఒక భూర్జవృక్షమూఉంది. చూశారు కదూ? అదిగో, ఆ చెట్టు మాను మీద కూర్చుని చిన్నారి ఉడుత ఒకటి నాతో దోబూచులాండింది. నేను అడవిలో నుంచి పుంతలోకి ప్రవేశిస్తూనే దానిని చూశాను. ఆ చెట్టు మాను వెనుక తన బుజ్జి శరీరాన్నంతా దాచుకుని, మూతీ, మెరిసే రెండు కళ్ళూ మాత్రం కనిపిస్తూ, ఆ ఉడుత నాకేసే చూస్తోంది. దానిని ఇంకా చూడాలనిపించింది. మరీ దగ్గరగా వెడితే బెదిరి పారిపోతుందని, దూరదూరంగానే ఉంటూ, ఆ చెట్టు చుట్టూ తిరిగాను. నేను నాలుగు ప్రదక్షిణాలు చేసినా, ఉడుత అనుమానంగానే చూస్తూ మాను వెనుకనే దాగి వుంటూ, చుట్టూ తిరుగుతూ వచ్చింది. నేను ఎంత ప్రయత్నించినా ఆ ఉడుత వీపుని మాత్రం చూడలేకపోయాను."

"ఆ చెట్టు చుట్టూ నాలుగు ప్రదక్షిణాలు చేశారని కదూ, చెప్పారూ?" అన్నాడు శ్రోతలలో ఒకడు.

"చెట్టు చుట్టూ తిరగడమైతే తిరిగాను కానీ, ఉడుత చుట్టూ మాత్రం తిరగలేకపోయాను" అన్నాడు కథకుడు.

"మరి, ఉడుత ఆ చెట్టు మాను మీదనే ఉంది కదా?"

"అవును."

"అంటే, మీరు ఆ ఉడుత చుట్టూ తిరిగినట్లే కదా?"

"ఆ ఉడుత వీపు నాకు కనిపించనప్పుడు దాని చుట్టూ తిరిగానని ఎలా అనగలం?"

"దాని వీపు గొడవ మనకెందుకూ? పుంత మధ్యలో ఉన్న చెట్టు మాను మీద ఉడుత ఉంది. ఆ చెట్టు చుట్టూ మీరు తిరిగారు. అంటే, ఆ ఉడుత చుట్టూ తిరిగినట్లే కదా?"

"అబ్బే, అలా ఎలా కుదురుతుంది? నేను మీ చుట్టూ తిరుగుతున్నాననుకుందాం. మీరు కూడా గిరగిరా తిరుగుతూ, ఎప్పుడూ మీ ముఖం నా వైపుకే తిరిగి ఉండేటట్లు కదులుతున్నారనుకుందాం. అప్పుడు నేను మీ చుట్టూ తిరిగినట్లవుతుందా?"

"మహారాజులా అవుతుంది. కాకపోతే మరేమవుతుంది?"

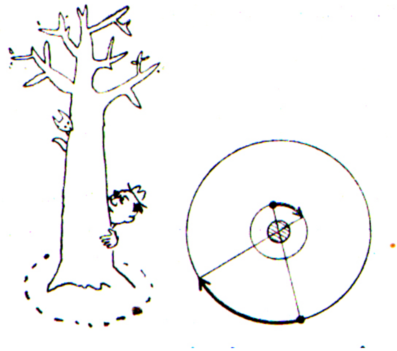
"మీ వీపు వెనుకకి నేనెప్పుడూ వెళ్ళకపోయినా సరే, మీ చుట్టూ తిరిగినట్లవుతుందా?"

"వీపు సంగతి మరిచిపోండి. మీరు నా చుట్టూ తిరుగుతున్నాడు. మనకి కావలసినది అంతే. ప్రదక్షిణాలకీ వీపుకీ సంబంధం ఏమిటి?"

"ఒక్క క్షణం ఆగండి. అసలు ప్రదక్షిణం అనే మాటకి అర్థం ఏమిటి? నాకు అర్థమైనది ఏమిటంటే, మధ్యనున్న వస్తువును అన్ని వైపుల నుంచీ చూసేలాగ తిరగడం అని, అయ్యా! ప్రొఫెసరుగారూ! నేనన్నది సబబేనంటారా?' అన్నాడు ఆ బల్లకి ఒక మూలన కూర్చుని ఉన్న ముసలాయన్ని ఉద్దేశించి.

ప్రొఫెసరుగారు గొంతు సవరించుకున్నారు. "మీ ఇద్దరి వాదాలూ వింటూంటే ప్రదక్షిణం అనే మాటకి మీరిచ్చే నిర్వచనం చాలా ముఖ్యమైనదని తెలుస్తోంది. మీరు వాదం మొదలుపెట్టడానికి ముందే ప్రదక్షిణం అనే మాటకి అర్థం ఏమిటో తెలుసుకోవాలి.

ఒక వస్తువు చుట్టూ తిరగడం అనే మాటను ఎలా అర్థం చేసుకుంటాం? దీనికి రెండు పద్ధతులున్నాయి; మొదటి పద్ధతి ఏమిటంటే, వృత్తానికి కేంద్రంలో ఉన్న వస్తువు చుట్టూ తిరగడం అని నిర్ధారణ చేసుకోవడం. రెండో పద్ధతి ఏమిటంటే, మధ్యనున్న వస్తువు యొక్క అన్ని పార్శ్వాలూ కనబడేటట్లు తిరగడం అని అర్థం చెప్పుకోవడం. మనం పైన చెప్పుకున్న మొదటి నిర్వచనాన్ని అంగీకరిస్తే మీరు ఉడుత చుట్టూ నాలుగు సార్లు తిరిగారు అని ఒప్పుకోవాలి. రెండవ నిర్వచనం ప్రకారం మీరు ఉడుత చుట్టూ తిరగనే లేదు. మీరిద్దరూ మాట్లాడుతున్నది ఒక్కటే భాష. అయితే, ఇద్దరూ మాటలను ఒక్కలాగే అర్థం చేసుకున్నట్లయితే, అసలు వాదానికి అవకాశమే లేదు."



1వ బొమ్మ : ఆ ఉడుత నాతో బాటే తిరుగుతూ తన వీపు కనబడనిచ్చింది కాదు.

“సరే, ఆ మాటకి రెండు అర్థాలు వస్తున్నాయని ఒప్పుకుంటాను. అయితే, ఈ రెండు అర్థాలలోనూ ఏది సరి అయినదంటారూ?”

“ప్రశ్న అడగవలసిన పద్ధతి అది కాదు. ఈ రెండు నిర్వచనాలలోనూ దేనినైనా మీరిద్దరూ అంగీకరించవచ్చు. అసలు ప్రశ్న ఏమిటంటే, ఈ రెండు అర్థాలలోనూ దేనిని అధిక సంఖ్యాకులు అంగీకరిస్తున్నారు అని. నా ఉద్దేశంలో మొదటి నిర్వచనమే. ఏమంటారా?* సూర్యుడు తన చుట్టూ తాను సుమారు 25 రోజులు కొక చుట్టు చొప్పున తిరుగుతున్నాడని మీకందరికీ తెలుసు.”

“ఏమన్నారు? సూర్యుడు తిరుగుతున్నాడా?”

“అందుకు సందేహం ఏముందీ? భూమి తన ఇరుసు మీద తాను తిరుగుతున్నట్లే సూర్యుడు కూడా తిరుగుతున్నాడు. మాట వరసకి సూర్యుడు 25 రోజులకు బదులు 365 ¼ రోజులకి (సరిగ్గా ఒక సంవత్సరానికి) ఒక ఆత్మ ప్రదక్షిణం పూర్తి చేస్తున్నాడనుకుందాం. ఇలాగే జరిగి వుంటే సూర్యుడి యొక్క, ఒక పార్శ్వం మాత్రమే, ఒక్క ముఖం మాత్రమే భూమికి కనిపిస్తూ ఉండి ఉండును. అలాగని భూమి సూర్యుడి చుట్టూ తిరగడం లేదని ఎవరైనా అనగలరా?”

“అవునవును. నాకిపుడు అర్థం అయింది. నేను ఉడుత చుట్టూ నాలుగు సార్లు తిరిగినట్లే అయింది.

---

* భూమి మీద నిజమని చూసేవారికి సూర్యుడు 27 రోజులకొక్క ఆత్మ ప్రదక్షిణం పూర్తి చేస్తున్నట్లు కనిపిస్తుంది — అనువాదకుడు.

"నాదొక చిన్న మనవి కామ్రేడ్స్!" అని జనంలోంచి ఒకడు కేకవేశాడు. "ఇప్పుడు వర్షం జోరుగా కురుస్తోంది. బయటికి వెళ్ళడం సాధ్యం కాదు. కనుక, మనం మెదడుకి పని చెప్పే చిక్కు ప్రశ్నలు వేసుకుందాం. ఈ ఉడుత కథతో ప్రారంభించడం బాగుంటుంది. మనలో ప్రతి ఒక్కరూ ఒక్కొక్క చిక్కు ప్రశ్న ఆలోచించుకుని సిద్ధంగా ఉండాలి."

"ఆల్జీబ్రా అంటే నాకు గుండె గాబరా. జామెట్రీ అయినా అంతే. కనుక ఈ రెండూ ఉంటే నేను ఆడలేను," అన్నది ఒక యువతి.

"నేనూ అంతే", అన్నాడు మరొకడు.

"అలా కాదు. అందరం ఆడవలసిందే. ఆల్జీబ్రా, జామెట్రీలకు సంబంధించిన ఫార్ములాలు ఉపయోగించనే వద్దు, అవి బహు ప్రాథమికమైనవి తప్ప. దీనికేమైనా అభ్యంతరాలున్నాయా?"

"ఏమీ లేవు" అన్నారు అంతా.

"సరే మొదలు పెడదాం."

"మరొక్క మాట. ప్రొఫెసరుగారు జడ్జిగా ఉంటారు."

"సరే."

2. స్కూలులో గ్రూపులు

ఒక స్కౌటు చెప్పడం మొదలుపెట్టాడు. "మా స్కూలులో 5 గ్రూపులున్నాయి. ఫిట్టర్సు గ్రూపు, కమ్మరం గ్రూపు, ఫొటోగ్రఫీ గ్రూపు, చదరంగం గ్రూపు, సంగీతం గ్రూపు అని. ఫిట్టర్సు గ్రూపు 2 రోజులకొకసారి కలుసుకుంటుంది. కమ్మరం గ్రూపు 3 రోజులకొకసారీ, ఫొటోగ్రఫీ గ్రూపు 4 రోజులకొకసారీ, చదరంగం గ్రూపు 5 రోజులకొకసారీ, సంగీతం గ్రూపు 6 రోజుల కొకసారీ కలుసుకుంటాయి. ఈ ఐదు గ్రూపులూ జనవరి ఒకటో తేదీన మొదటిసారి కలుసుకున్నాయి. ఇప్పుడు మన ప్రశ్న ఏమిటంటే, మొదటి మూడు నెలలలోనూ ఈ ఐదు గ్రూపులూ ఒకే రోజున కలుసుకోవడం ఎన్నిసార్లు జరుగుతుంది (జనవరి ఒకటో తేదీన కలుసుకున్నది కాక)?"

"అది లీపు సంవత్సరమా?"

"కాదు."

"మరో మాటలో చెప్పాలంటే మొదటి 3 నెలలలోనూ 90 రోజులు ఉన్నాయన్నమాట."

"రైట్."

ఈ ప్రశ్నకే నాదొక చిన్న చేర్పు. ఈ మొదటి 3 నెలల్లోనూ ఏ ఒక్క గ్రూపూ కూడా కలుసుకోని రోజులు ఎన్ని?" అని అడిగాడు ప్రొఫెసరు.

"అయితే ఇందులో తిరకాసు ఉందన్నమాట. ఐదు గ్రూపులూ ఒక్కసారిగా కలుసుకునే రోజు మరొకటి ఉన్నదన్నమాట. ఇలాగే, ఏ ఒక్క గ్రూపూ కూడా కలుసుకోని రోజు కూడా ఉన్నదన్నమాట. అర్థం అయింది."

"ఏం అలా అన్నారు?"

"ఏమో, నాకు ఇందులో ఏదో తిరకాసు ఉందని తోచింది."

"కామ్రేడ్స్! ఈ చిక్కు ప్రశ్నలకు జవాబులు ఇప్పుడిప్పుడే ఎవ్వరూ చెప్పకూడదు. వీటిని గురించి ఆలోచించుకోవడానికి మనకందరికీ వ్యవధి కావాలి. రాత్రి భోజనాల వేళ ప్రొఫెసరుగారు ఈ ప్రశ్నలన్నింటికీ జవాబులు వివరిస్తారు" అన్నాడు ఈ ఆట మొదలు పెట్టిన పెద్దమనిషి.

3. దుంగల లెక్క

"ఒక పూరి గుడిసెలో ముగ్గురు ఆడవాళ్ళు ఉంటున్నారు. వాళ్ళని X, Y, Z అని పిలుద్దాం. ముగ్గురికీ కలిపి ఒకటే పొయ్యి. వంటలు మాత్రం ఎవరివి వారివే. X అనే ఆవిడ 3 దుంగలు తెచ్చి పొయ్యిలో పెట్టింది. Y అనే ఆవిడ 5 దుంగలు తెచ్చి పొయ్యిలో పెట్టింది. Z అనే ఆవిడ దగ్గర వంట చెరుకు ఏమీ లేకపోవడం చేత, తాను వంట చేసుకున్నందుకుగాను తన వాటా వంట చెరుకు ఖరీదు 8 పైసలు ఇచ్చింది. X, Y లు ఆ 8 పైసలని ఏ విధంగా పంచుకోవాలి?"

"సమానంగా పంచుకోవాలి" అని వెంటనే ఎవరో జవాబిచ్చారు. Z అనే ఆవిడ మిగిలిన ఇద్దరు ఆడవాళ్ళు తెచ్చిన దుంగల తాలూకు మంటను తన వంట కోసం ఉపయోగించుకుంది కదా?"

"అబ్బే, అది తప్పు" అని మరొకరు అడ్డు వచ్చాడు. X, Y లు వేరు వేరు సంఖ్యల దుంగలను తెచ్చారు కదా? కనుక X అనే ఆవిడ 3 పైసలు Y అనే ఆవిడ 5 పైసలు తీసుకోవడం ధర్మం."

"సరే, ఆలోచించుకోడానికి మనకి చాలా టైము ఉంది. తరువాత ఎవరు?" అన్నారు ప్రొఫెసరు.

4. ఎవరు ఎక్కువ లెక్కిస్తారు?

"దారిన వెడుతున్న మనుష్యులను లెక్కపెట్టాలని ఇద్దరు ఆసాములు నిశ్చయించుకున్నారు. ఒకడు తన గుమ్మంలో నిలుచుని, మరొకరు పేవ్‌మెంట్ మీద అటూ ఇటూ పచార్లు చేస్తూ ఒక గంట సేపు లెక్కపెట్టారు. వారిద్దరిలో ఎవరు ఎక్కువ మందిని లెక్కపెట్టి ఉంటారు?"

సహజంగా అటూ ఇటూ నడుస్తున్నవాడే ఎక్కువ మందిని లెక్కపెట్టి ఉంటాడు అన్నాడు శ్రోతలలో ఒకడు.

"రాత్రి భోజనాల వేళ జవాబు తెలుస్తుంది. ఓపిక పట్టండి. తరువాత ఎవరు?" అన్నారు ప్రొఫెసరు.

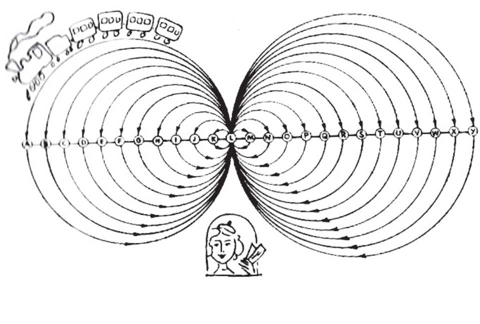
5. తాత - మనవడు

"1932లో నా పుట్టిన సంవత్సరం తాలూకు చివరి రెండు అంకెలు నా వయస్సుకి సమానం. ఈ చిత్రమైన విషయాన్ని మా తాతగారికి చెప్పగా, తన వయస్సు విషయంలో కూడా సరిగ్గా అంతే అన్నారు ఆయన. ఇది అసాధ్యమైన సంగతి అనిపించింది...."

"అందులో అసాధ్యమేమీ లేదు" అన్నది ఒక అమ్మాయి.

"మా తాతగారు ఈ విషయాన్ని అక్షరాలా రుజువు చేశారు. ఇంతకీ 1932లో నా వయస్సూ, మా తాతగారి వయస్సూ ఎంత ఉంటాయో చెప్పగలరా?"

6. రైల్వే టిక్కెట్లు



2వ బొమ్మ : నేను రైల్వే టికెట్లు అమ్ముతూ ఉంటాను.

"రైల్వే టిక్కెట్లు అమ్మే ఉద్యోగం నాది" అంది తరువాత కూర్చున్న యువతి. "ఇది చాలా సులభమైన ఉద్యోగం అనుకుంటారు చాలామంది. ఎంత చిన్న స్టేషన్ అయినా సరే, ఎన్ని రకాల టికెట్లు అమ్మవలసి వస్తుందో చాలామంది ఊహించలేరు. నేను పనిచేసే లైను మీద 25 స్టేషన్లు ఉన్నాయి. ఎగువకీ, దిగువకీ అన్ని స్టేషనులకీ వేరు వేరు టిక్కెట్లు అమ్మాలి. ఎన్ని రకాల టిక్కెట్లు మా స్టేషనులో ఉంటాయో చెప్పగలరా?"

"తరువాత నీ వంతు" అన్నారు ప్రొఫెసర్ ఒక పైలట్‌ని ఉద్దేశించి.

7. హెలికాప్టరు ప్రయాణం

"ఒక హెలికాప్టరు లెనిన్‌గ్రాడ్‌లో బయలుదేరి ఉత్తరంగా 500 కి.మీ. ప్రయాణం చేసి, తూర్పుగా తిరిగి 500 కి.మీ. ప్రయాణం చేసింది. తరువాత దక్షిణంగా తిరిగి 500 కి.మీ. వెళ్ళి, పశ్చిమంగా తిరిగి మరో 500 కి.మీ. వెళ్ళి నేల మీదకి దిగింది. ఇప్పుడు మన ప్రశ్న ఏమిటంటే, హెలికాప్టరు వాలిన చోటు లెనిన్‌గ్రాడ్‌కి పడమట నుందా? తూర్పున ఉందా? ఉత్తరాన ఉందా? లేక దక్షిణాన ఉందా?"

"ఇది చాలా సులభమైన ప్రశ్న" అన్నారు ఎవరో. "ఎదరికి 500 అడుగులు వెళ్ళి, కుడివైపు తిరిగి 500 అడుగులు వెళ్ళి, వెనుకకి 500 అడుగులు వేసి, మళ్ళీ ఎడమకి 500 అడుగులు నడిస్తే నువ్వు బయలుదేరిన చోటుకే వస్తావుగా?"

"అంత సులభమా? అయితే, ఇంతకీ హెలికాప్టరు ఎక్కడ వాలిందంటారూ?"

"లెనిన్‌గ్రాడ్‌లోనే. ఇంకెక్కడ?"

"తప్పు."

"అయితే నాకు అర్థం కాలేదు."

"ఇందులో కూడా ఏదో తిరకాసు ఉండే ఉంటుంది" అన్నాడు మరొకరు.

"అయితే హెలికాప్టరు లెనిన్‌గ్రాడ్‌లో వాలదా?"

"మీ ప్రశ్నని మరోసారి వినిపించండి."

పైలట్ మళ్ళీ చెప్పాడు. శ్రోతలు ముఖముఖాలు చూసుకున్నారు.

"సరే, మనకి ఆలోచించుకోడానికి చాలా వ్యవధి ఉంది. తరువాత ప్రశ్నకి వెడదాం" అన్నారు ప్రొఫెసరు.

8. నీడ

"నా ప్రశ్న కూడా హెలికాప్టరుకి సంబంధించినదే. హెలికాప్టరు దాని తాలూకు నీడ – ఈ రెండింటిలో ఏది పెద్దదిగా ఉంటుంది?" అని మరొకడు తన ప్రశ్న వినిపించాడు.

"అంతేనా?"

"ఆహా."

"అయితే విను! సహజంగా నీడే పెద్దదిగా ఉంటుంది. సూర్యకిరణాలు విసనకర్రలా విప్పుకుంటాయి కదా?"

"నేను అలా అనుకోవడం లేదు. సూర్యకిరణాలు సమాంతరంగా ఉంటాయి. కనుక, హెలికాప్టరు, దాని నీడా కూడా ఒకే సైజులో ఉండాలి" అన్నాడు మరొకడు.

ఊహూ, అదేం కాదు. మబ్బుల వెనుక సూర్యుడున్నప్పుడు కిరణాలు విసనకర్రలా విప్పుకోవడం చూడలేదూ? చూసి ఉంటే తెలిసేది కిరణాలు ఎంత దూర దూరంగా పోతాయో. మబ్బు తాలూకు నీడ మబ్బుకన్న పెద్దదిగా ఉన్నట్లే హెలికాప్టరు యొక్క నీడ హెలికాప్టరు కన్న పెద్దదిగా ఉంటుంది."

"అలా అయితే ఖగోళ శాస్త్రజ్ఞులు, నావికులు సూర్యకిరణాలు సమాంతరంగా పడతాయని ఎందుకంటూ ఉంటారు?"

ప్రొఫెసరుగారు ఈ వాదోపవాదాలను తుంచేసి, తరువాతి ప్రశ్న చెప్పమన్నారు.

9. అగ్గిపుల్లలు

ఒకడు అగ్గిపెట్టె తీసి, అందులో ఉన్న పుల్లలన్నిటినీ బల్ల మీద గుమ్మరించి, వాటిని మూడు భాగాలు చేశాడు.

"తమరు చలిమంట వేయబోవడం లేదు కదా?" అని ఎవరో చమత్కరించారు.

"ఉహూ వీటితోటే ఉంది నా చిక్కు ప్రశ్న ఇక్కడ మూడు అసమానమైన అగ్గిపుల్లల కుప్పలు ఉన్నాయి. మొత్తం పుల్లలు అన్నీ కలిపితే 48, ఒక్కొక్క పోగులో ఎన్నేసి పుల్లలు ఉన్నాయో నేను చెప్పను. జాగ్రత్తగా చూసుకోండి. రెండవ పోగులో ఉన్నన్ని పుల్లలు మొదటి పోగులో నుంచి తీసి రెండవ పోగులో వెయ్యండి. తరువాత మూడవ పోగులో ఉన్నన్ని పుల్లలు రెండవ పోగులో నుంచి తీసి మూడవ పోగులో వెయ్యండి.తరువాత

మొదటి పోగులో ఉన్నన్ని పుల్లలు మూడవ పోగులో నుంచి తీసి మొదటి పోగులో వెయ్యండి. ఈ విధంగా చేశాక, మూడు పోగులలోనూ సమాన సంఖ్యలో అగ్గిపుల్లలు వుంటాయి. అయితే, మొట్టమొదట ఒక్కొక్క పోగులో ఎన్నేసి పుల్లలు వుండేవి?"

10. విచిత్ర వృక్షం

"గణితం తెలిసిన పల్లెటూరి ఆసామి నన్ను ఒకసారి అడిగిన చిక్కు ప్రశ్న ఇది" అని తరువాతి వాడు చెప్పసాగాడు. "ఇదొక చమత్కారమైన కథ. ఒక రోజున అడవిలో ఒక రైతూ, ఒక ముసలివాడూ కలుసుకున్నారు. వాళ్ళిద్దరూ కబుర్లలో పడ్డారు. ముసలివాడు రైతును జాగ్రత్తగా పరిశీలించి ఇలా అన్నాడు :

"ఈ అడవిలో ఒక విచిత్రమైన చెట్టు ఉంది. అది కల్ప వృక్షంలాగ సాయం చేస్తుంది."

"నిజంగానా? రోగాలు కుదురుస్తుందా?"

"అబ్బే, రోగాలు కుదర్చదు. నీ డబ్బును రెట్టింపు చేసి తిరిగి నీకిస్తుంది. నీ డబ్బు సంచీ తీసుకువెళ్ళి, ఆ చెట్టు మొదట్లో పెట్టి, కళ్ళు మూసుకుని, వంద అంకెలు లెక్కపెట్టి చూసుకుంటే ఆ సంచిలో ఉన్న డబ్బు రెట్టింపు అయి ఉంటుంది. చాలా మహిమ గల చెట్టులే అది."

"నేను ప్రయత్నిస్తే అవుతుందా?" రైతు చాలా ఉత్సాహం చూపించాడు.

"మహారాజులా అవుతుంది. కాని, సుంకం చెల్లించాలి."

"సుంకమా? ఎవరికి? ఎంత?"

"ఆ చెట్టును చూపించినవాడికి. అంటే నాకు అన్నమాట. ఎంత చెల్లించాలంటావా? చెప్తా."

ఇద్దరూ బేరంలోకి దిగారు. రైతు దగ్గర మరీ పెద్ద మొత్తం లేదని గ్రహించిన ముసలివాడు, డబ్బు రెట్టింపు అయినప్పుడల్లా తన వాటా సుంకం ఒక రూపాయి 20 పైసలు మాత్రమే తీసుకోడానికి ఒప్పుకున్నాడు.

వాళ్ళిద్దరూ చాలాసేపు అడవిలో తిరిగారు. ఆఖరికి గుబురు పొదల మధ్యని సగం విరిగిన మద్ది చెట్టును రైతుకి చూపించాడు ముసలివాడు. రైతు దగ్గర నుంచి డబ్బు సంచి తీసుకుని, ఆ చెట్టు వేళ్ళ సందులలో దూర్చాడు. తరువాత వంద అంకెలు లెక్కపెట్టారు.

ముసలివాడు ఒంటరిగా ఆ చెట్టు దగ్గరకు వెళ్ళి, చాలాసేపు శ్రమ పడి, ఆఖరికి డబ్బు సంచీ బయటికి లాగి, తెచ్చి రైతుకిచ్చాడు.

రైతు సంచి విప్పి చూసుకుంటే, అందులో నిజంగానే మొదట తాము పెట్టిన డబ్బు రెట్టింపు అయి ఉంది. అన్నమాట ప్రకారం 1 రూ. 20 పైస/లు లెక్క పెట్టి ముసలివాడికిచ్చేసి, ఇంకోసారి డబ్బును రెట్టింపు చేయమని కోరాడు.

మళ్ళీ, మూటను చెట్టు మొదట దాచి, వంద అంకెలు లెక్కపెట్టి, ముసలివాడు ఆ మూటను శ్రమపడి బయటికి లాగి, రైతుకిచ్చాడు. మళ్ళీ అందులో డబ్బు రెట్టింపు అయి వుంది. యధాప్రకారం ముసలివాడు తన వాటా 1 రూ. 20 పైసలు తీసుకున్నాడు.

మళ్లీ మూడవసారి డబ్బు మూటని చెట్టు మొదట్లో దాచాడు. ఆ డబ్బు మళ్ళీ రెట్టింపు అయింది. కాని, ఈసారి ముసలివాడి వాటా 1 రూ. 20 పైసలు పోగా ఆ సంచి ఖాళీ అయిపోయింది. మరోసారి రెట్టింపు చేయడానికి అందులో ఒక్కపైసా కూడా మిగల లేదు. పాపం! రైతు తన డబ్బంతా పోగొట్టుకుని మెడ వేలాడేసుకుని ఇంటికి పోయాడు.

ఇందులోని రహస్యం అందరికీ అర్థం అయే ఉంటుంది. చెట్టు మొదట్లో పెట్టిన డబ్బు మూటను బయటికి తీయడానికి, అంతంత సేపు పట్టడానికి కారణం లేకపోలేదు.

"ఇంతకీ నా ప్రశ్న ఏమిటంటే, ఆ రైతు దగ్గర మొట్ట మొదట ఎంత డబ్బు ఉండేది?"

11. డిసెంబరు తమాషా

మరొకడు తన ప్రశ్న వినిపించాడు.

"కామ్రేడ్స్! నేను చదువుకున్నది గణిత శాస్త్రం కాదు. భాషా శాస్త్రం. కనుక నా ప్రశ్న గణితానికి సంబంధించినది కాదు. పంచాంగానికి సంబంధించినది."

"సరే, కానివ్వండి."

"నెలల పేర్లలో పన్నెండవది డిసెంబరు కదా? కాని, ఆ పేరుకి అసలు అర్థం ఏమిటో మీకు తెలుసా? గ్రీకు భాషలోని 'డెకా' అనే మాట నుంచి డిసెంబరు అనే మాట పుట్టింది. డెకా అంటే పది అని అర్థం. ఉదాహరణకి, డెకా లీటరు అంటే పది లీటర్లు అని

అర్ధం. డికేడ్ అంటే పది సంవత్సరాలు అని అర్ధం. కనుక డిసెంబర్ పదవ నెల అవాలి. కాని, అది పదవది కాక పన్నెండవ నెల అయి కూర్చుంది. దీనికి కారణం ఏమంటారు?

12. అంకెల తమాషా

"అంక గణితంలో ఒక తమాషా చూపిస్తాను. అది అలా ఎందుకు జరుగుతుందో ఆ సంగతి మీరు వివరించాలి. మీలో ఒకరు – మీరైనా సరే ప్రొఫెసర్‌గారూ! కాగితం మీద మీకు తోచిన ఏదో ఒక మూడు అంకెల సంఖ్యను రాయండి. కాని, ఏమి రాశారో నాకు చెప్పకండి."

"ఆ సంఖ్యలో మార్పులు ఉండవచ్చునా?"

"మినహాయింపులు ఏమీ లేవు. మీకు తోచిన ఏ మూడంకెల సంఖ్యనైనా రాసుకోవచ్చు."

"సరే రాశాను. తరువాత?"

"దానికి కుడిపక్కన మళ్ళీ అదే సంఖ్యను రాయండి. ఇప్పుడు ఆరు అంకెల సంఖ్య ఏర్పడింది కదా?"

"రైట్."

"ఆ కాగితాన్ని మీ పక్కవారికి అందించండి. ఆయన ఆ సంఖ్యని 7 చేత భాగించాలి."

"చెప్పడం సులభమే. అందులో 7 సరిగ్గా పోకపోతేనో?"

"మరేం భయం లేదు, పోతుంది."

"ఆ సంగతి ఇంత ధీమాగా ఎలా చెప్పగలరు, ఆ సంఖ్యను చూడకుండానే?"

"ఆ సంగతి తరువాత మాట్లాడుకుందాం. ముందు 7 చేత భాగించండి."

"మీరన్నది నిజమే. 7 సరిగ్గా పోయింది."

"వచ్చిన విభక్తాన్ని (Quotient) మీ పక్కనున్న వారికి అందించండి. దానిని ఆయన 11చేత భాగించాలి."

"భాగించి చూడండి. శేషం మిగలదు."

"నిజమే నిశ్శేషంగా పోయింది."

"ఆ వచ్చిన విభక్తాన్ని ఆ పక్కవారికి అందించండి. వారు దానిని 13 చేత భాగించాలి."

"పదమూడు చేత భాగించాలా? 13చే భాగించబడే సంఖ్యలే చాలా తక్కువ. మీరు నిజంగా చాలా అదృష్టవంతులు. ఇందులో 13 సరిగ్గా పోయింది."

"సరే, ఆ కాగితాన్ని ఎవరికీ కనబడకుండా మడతలు పెట్టి ఇలా ఇవ్వండి."

ఆ కాగితం మడతని ప్రొఫెసరు గారికి అదించాడు అతడు.

"ఈ కాగితం మీద మీరు మొదట తలచుకున్న 3 అంకెల సంఖ్య ఉంటుంది చూడండి."

"నిజమే! అని ప్రొఫెసరుగారు కాస్త ఆశ్చర్యపడ్డారు. నేను మొదట్లో రాసిన సంఖ్య అదే... సరే, అందరూ ప్రశ్నలు వేయడం అయింది కదా? వర్షం వెలిసింది. ఇంక బయటికి వెడదాం. వాటికన్నింటికి జవాబులు రాత్రి తెలుసుకుందాం. ప్రశ్నల కాగితాలన్నిటినీ నాకిచ్చి వెళ్ళండి."

1 నుంచి 12 వరకూ జవాబులు

1. ఉడుత కథకి జవాబు ఇంతకుముందే తెలుసుకున్నాం. కనుక దానిని వదిలేసి ముందుకు వెడదాం.
2. ఆ ఐదు గ్రూపులూ మొదటి మూడు నెలలలోనూ (జనవరి 1వ తేదీ మినహాయించి) ఏయే రోజులలో కలుసుకుంటారు అనే మొదటి ప్రశ్నకు జవాబు సులభమే. 2, 3, 4, 5, 6 ల కనిష్ట సామాన్య గుణితం (క.సా.గు. L.C.M.) తెలిస్తే చాలు. అది 60 కనుక ఆ ఐదు గ్రూపులూ మళ్ళీ 61వ రోజున కలుసుకుంటారు. ఫిట్టర్ను గ్రూపు 30 సమావేశాల తరువాతనూ, కమ్మరం గ్రూపు 20 సమావేశాల తరువాతనూ, ఫొటోగ్రఫీ గ్రూపు 15 సమావేశాల తరువాతనూ, చదరంగం గ్రూపు 12 సమావేశాల తరువాతనూ, సంగీతం గ్రూపు 10 సమావేశాల తరువాతనూ కలుసుకుంటారు. మరోలా చెప్పాలంటే ఆ ఐదు గ్రూపులూ అరవయ్యేసి రోజులకొక్కొక్కసారి ఏక సమయంలో సమావేశమవుతారు. మొదటి 3 నెలలలోనూ ఉన్నవి మొత్తం

90 రోజులే కనుక, జనవరి 1వ తేదీ తరువాత ఆ 3 నెలలలోనూ ఒకే ఒకసారి మాత్రమే అంతా కలుసుకుంటారు.

మొదటి 3 నెలలలోనూ ఏ గ్రూపూ సమావేశం కాని రోజులు ఎన్ని అనే రెండవ ప్రశ్నకి సమాధానం చెప్పడం ఇంకొంచెం కష్టం. ఇది తెలుసుకోవడానికి 1 నుంచి 90 వరకూ వరుసగా అంకెలు వేసుకుని, అందులో ఫిట్టర్సు గ్రూపు సమావేశమయ్యే 1, 3, 5, 7, 9... వగైరా తేదీలన్నీ కొట్టి వెయ్యాలి. ఆ తరువాత కమ్మరం గ్రూపు సమావేశమయ్యే 4, 7, 10, 13.... వగైరా తేదీలన్నీ కొట్టెయ్యాలి. తరువాత ఫొటోగ్రఫీ, తరువాత చదరంగం, ఆ తరువాత సంగీతం గ్రూపుల తాలూకు తేదీలు కొట్టెయ్యాలి. మిగిలిన తేదీలే మన రెండో ప్రశ్నకు సమాధానాలు.

ఈ విధంగా చేయగా ఏ గ్రూపూ సమావేశం కాని రోజులు మొదటి 3 నెలలలోనూ 24 ఉంటాయని తేలుతుంది. జనవరి 8 రోజులు (2, 8, 12, 14, 18, 20, 24, 30 తేదీలు), ఫిబ్రవరిలో 7 రోజులు, మార్చిలో 9 రోజులూ ఉంటాయి.

3. Z అనే ఆవిడ 8 దుంగలకు 8 పైసలు ఇచ్చిందనీ, కనుక ఒక్కొక్క దుంగ వెల ఒక్కొక్క పైస అనీ చాలామంది అనుకుంటూ ఉంటారు. కాని అది తప్పు. ఎనిమిది దుంగల ఖరీదులో మూడవవంతుకి మాత్రమే ఆమె డబ్బు చెల్లించిందని జ్ఞాపకం ఉంచుకోవాలి. ఏమంటే, ఆ 8 దుంగల వల్ల వచ్చిన మంటని ఆ ముగ్గురూ తమ వంటల కోసం సమానంగాఉపయోగించుకున్నారు. 8 దుంగల మొత్తం ఖరీదు $8 \times 3 = 24$ పైసలు. కనుక ఒక్కొక్క దుంగ వెల రూ. 3 కోసెక్కులు.

   ఇప్పుడు X, Y లు ఆ పైసలని ఏ విధంగా పంచుకోవాలో సులభంగానే లెక్క కట్టవచ్చు. Y అనే ఆవిడ తెచ్చిన 5 దుంగల వెల $5 \times 3 = 15$ పైసలు. అందులో 8 పైసల విలువైన మంటని ఆమె తన వంటకి ఉపయోగించుకుంది. కనుక ఆమెకి రావలసిన మొత్తం $15 - 8 = 7$ పైసలు. ఇకపోతే X అనే ఆవిడ తెచ్చిన 3 దుంగల ఖరీదు $3 \times 3 = 9$ పైసలు. అందులోనుంచి ఆమె వంటకి అయిన మంట విలువ 8 పైసలు తీసేస్తే $9 - 8 = 1$ పైస. ఆమెకు రావలసిన మొత్తం 1 పైస మాత్రమే.

4. ఆ ఇద్దరు లెక్కించిన బాటసారుల సంఖ్యలూ ఒకటే. ద్వారం దగ్గర నిలుచున్నవాడు రోడ్డు మీద ఇటూ అటూ వెళ్ళే వాళ్ళ నందరినీ లెక్కించాడు. పేవ్‌మెంట్ మీద పచార్లు చేస్తున్నవాడు కూడా తాను కలుసుకున్న వాళ్ళనందరినీ లెక్కించాడు.

దీనినే మరోలా చెప్పవచ్చు. పచార్లు చేస్తూ బాటసారులను లెక్కపెడుతున్న వాడు ద్వారం దగ్గర నిలుచుని లెక్కపెడుతున్న వాడిని మొట్టమొదటిసారి కలుసుకున్నప్పుడు బేరీజు వేసుకు చూస్తే, వాళ్ళిద్దరి లెక్కింపులూ ఒక్కటే అయి వుండాలి. ఏమంటే, నిలుచున్న వాడిని దాటి వెళ్ళిన బాటసారులనే పచార్లు చేసేవాడు కూడా కలుసుకుని ఉండాలి. ముందరికి వెడుతూ గాని, వెనక్కి వెడుతూ గాని, పచార్లు చేసేవాడు నిలుచున్న వాడిని కలుసుకున్నప్పుడల్లా లెక్కించిన బాటసారుల సంఖ్యలు ఒకటే. అలాగే ఒక గంట తరువాత కూడానూ.

5. మొట్టమొదటిసారి వింటే ఈ లెక్కలో ఏదో తప్పు ఉందనిపిస్తుంది. లేకపోతే తాతా మనుమల వయస్సులు ఒక్కటే ఎలా అవుతాయి అనుకుంటారు. కాని, లెక్కలో ఎటువంటి తప్పు లేదని మీకు ఇప్పుడే చూపిస్తాను.

మనుమడు 20వ శతాబ్దంలో పుట్టి ఉండాలని తెలుస్తూనే ఉంది. కనుక, అతడు పుట్టిన సంవత్సరం తాలూకు మొదటి రెండూ అంకెలూ 19 (వందలని తెలుపుతుంది) అయి వుండాలి. చివరి రెండు అంకెలను రెట్టింపు చేస్తే 32 రావాలి. కనుక ఆ సంఖ్య 16 అయి వుండాలి. కనుక మనుమడు పుట్టిన సంవత్సరం 1916 కావాలి. కనుకనే 1932లో అతని వయస్సు 16 సంవత్సరాలు.

తాతగారు 19వ శతాబ్దంలో పుట్టి ఉండాలి. కనుక ఆయన జన్మ సంవత్సరపు మొదటి రెండు అంకెలూ 18 అయి వుండాలి. మిగిలిన రెండు అంకెల సంఖ్యను రెట్టింపు చేస్తే 132 రావాలి. కనుక ఆ సంఖ్య 66. కనుక తాతగారు పుట్టిన సంవత్సరం 1866. ఆయనకి 1932లో 66 ఏళ్ళు ఉంటాయి కదా?

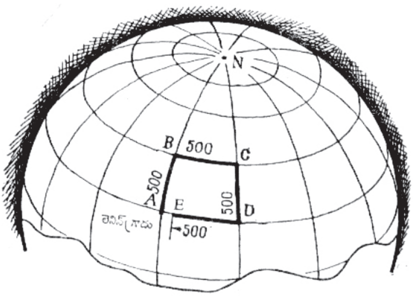
ఈ విధంగా 1932లో తాతా మనమల వయస్సులు వాళ్ళ జన్మ సంవత్సరాల చివరి రెండు అంకెలకే సమానం.

6. లైను మీద ఉన్న 25 స్టేషన్లలోనూ, ప్రతి ఒక్క స్టేషన్‌లోనూ మిగిలిన 24 స్టేషన్‌లకు వెళ్ళడానికి టికెట్లు ఉంటాయి. కనుక, ఆ లైను మీద మొత్తం టిక్కెట్లు 25 × 24 = 600 రకాలు. ఇవిగాక "రౌండు ట్రిప్పు" టిక్కెట్లు కూడా ఉంటే ఆ సంఖ్య రెట్టింపు అవుతుంది. అంటే, 1200 రకాల టిక్కెట్లు ఆ లైను మీద వినియోగంలో ఉంటాయి.

7. ఈ లెక్కలో అసందర్భమైనది ఏమీ లేదు. చతురస్రపు భుజముల గుండా హెలికాప్టరు ప్రయాణం చేసిందనుకోవడం పొరపాటు. భూమి గోళాకారంలో ఉన్నదనీ, రేఖాంశములు ధ్రువముల వద్ద కలుసుకుంటాయనీ జ్ఞాపకం పెట్టుకోవాలి.

లెనిన్‌గ్రాడ్‌కి 500 కి.మీ. ఉత్తరాన గల అక్షాంశం మీద 500 కి.మీ. తూర్పుగా ప్రయాణం చేసిన హెలికాప్టరు, లెనిన్‌గ్రాడ్ అక్షాంశం దగ్గర తిరిగి అడంగును చేరుకునేటప్పటి ప్రయాణంలో కన్న "ఎక్కువ డిగ్రీలు" ప్రయాణం చేస్తుంది. తత్ఫలితంగా హెలికాప్టరు లెనిన్‌గ్రాడుకి తూర్పుగా కొంత దూరంలో నేల మీద వాలి ఉంటుంది.

ఎంత దూరంలో ఆగి ఉంటుంది? ఖచ్చితమైన లెక్కలు కట్టవచ్చు. 3వ బొమ్మలో హెలికాప్టరు ప్రయాణం చేసిన దారి ABCDE అని చూపబడింది. N అనేది ఉత్తర ధ్రువాన్ని సూచిస్తుంది. AB, DC అనే రేఖాంశములు ఇక్కడ కలుసుకుంటాయి. హెలికాప్టరు మొదట ఉత్తరంగా అంటే, AN అనే రేఖాంశం మీదుగా 500 కి.మీ. ప్రయాణం చేసింది.



3వ బొమ్మ

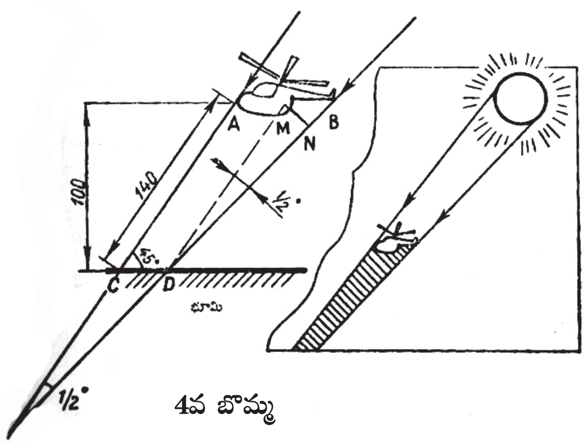
ఒక డిగ్రీ రేఖాంశము = 111 కి.మీ. కనుక 500 కి.మీ. = $500 \div 111 = 4^0 5'$ లెనిన్‌గ్రాడ్ 60^0 అక్షాంశం మీద ఉంది. కనుక B అనే చోటు $60 + 4^0 5' = 64^0 5'$ అక్షాంశం మీద ఉంటుంది. తరువాత హెలికాప్టరు తూర్పుగా – అంటే BC అనే అక్షాంశం మీదుగా – 500 కి.మీ. దూరం ప్రయాణం చేసింది. ఈ అక్షాంశం దగ్గర ఒక డిగ్రీకి సమానమైన దూరం ఎంతో లెక్కకట్టవచ్చు (లేదా ఖగోళ శాస్త్రపు పట్టికలలో చూసి తెలుసుకోవచ్చు). అది 48 కి.మీ.కి సమానం. దీనిని బట్టి హెలికాప్టరు తూర్పుగా $500 \div 48 \approx 10^0 4'$ ప్రయాణం చేసిందని తెలుస్తోంది. అక్కడి నుంచి దక్షిణంగా, అంటే CD అనే రేఖాంశం మీదుగా 500 కి.మీ. ప్రయాణం చేసి, లెనిన్‌గ్రాడ్ అక్షాంశానికి (60^0) వచ్చింది. అక్కడి నుంచి పడమరగా అంటే D, A అనే బిందువుల మధ్య దూరం కన్నా సహజంగా తక్కువే కదా? BC లో ఎన్ని డిగ్రీలు ఉన్నాయో DA లో కూడా సరిగ్గా అన్ని డిగ్రీలే $(10^0 4)$ ఉన్నాయి కానీ,

60వ అక్షాంశం దగ్గర 1 డిగ్రీ = 55.5 కి.మీ. కనుక, A, D ల మధ్య దూరం 577 కి.మీ., దీనిని బట్టి హెలికాప్టర్ లెనిన్‌గ్రాడ్‌లో దిగలేదని తెలుస్తోంది కదా? లెనిన్‌గ్రాడ్‌కి 77 కి.మీ. దూరంలో "లదోగా" అనే సరస్సులో దిగుతుంది!

8. మన కథలోని ఈ సమస్యని చర్చించడంలో జనం చాలా పొరపాట్లు చేశారు. సూర్యకిరణాలు విసనకర్రలా విప్పారుతాయి అని అనుకోవడం పొరపాటు. భూసూర్యుల మధ్య దూరంతో పోల్చితే, భూమి బహు చిన్నది కావడం చేత సూర్యకిరణాలను సమాంతర రేఖలుగా భావించవచ్చు. ఒక్కొక్కప్పుడు (ఉదాహరణకి, సూర్యుడు మబ్బుల చాటున ఉన్నప్పుడు) సూర్యకిరణాలు విసనకర్రలా విప్పారుతున్నట్లు కనబడటం కేవలం భ్రమ. దీనిని సందర్శ భ్రమ (Perspective) అంటారు.

సమాంతర రేఖలు (ఉదాహరణకి – రైలు పట్టాలు) బహు దూరాన కలుసుకున్నట్లు, అక్కడి నుంచి మన వైపుకి వస్తున్న కొద్దీ దూర దూరంగా జరిగిపోతున్నట్లు కనిపించడం ఈ సందర్శ భ్రమకి ఒక ఉదాహరణ.

సూర్యకిరణాలు భూమి మీద సమాంతరంగా పడుతున్నంత మాత్రాన హెలికాప్టర్ తాలూకు పరిపూర్ణ ఛాయ (Perfect Shadow) హెలికాప్టరు సైజులోనే ఉంటుందనుకోవడం కూడా పొరపాటే. 4వ బొమ్మలో చూపినట్లు హెలికాప్టరు యొక్క పరిపూర్ణ ఛాయ భూమి వైపు వస్తున్న కొద్దీ, అంతకంతకూ తక్కువై పోతూ ఉంటుంది. కనుక, హెలికాప్టరు కన్న దాని నీడ చిన్నదిగా ఉంటుంది. AB కన్న CD చిన్నది.



4వ బొమ్మ

హెలికాప్టరు ఎంత ఎత్తులో ఎగురుతుందో తెలిస్తే హెలికాప్టరుకి, భూమి మీద పడిన దాని నీడకీ గల భేదాన్ని గుణించవచ్చు. ఉదాహరణకి, హెలికాప్టరు 100 మీటర్ల ఎత్తున ఎగురుతోంది అనుకుందాం. 4వ బొమ్మలో AC, BD అనే రేఖల మధ్య కోణం, భూమి వద్ద సూర్యబింబం ఏర్పరచే కోణానికి సమానం. ఈ కోణం 1/2 డిగ్రీకి సమానం అని మనకు తెలుసు, అంతేకాకుండా మన కంటి దగ్గర 1/2 డిగ్రీ కోణాన్ని ఏర్పరచే ఏదైనా వస్తువుకీ మన కంటికీ మధ్య దూరం ఆ వస్తువు వ్యాసానికి 115 రెట్లు అని కూడా మనకు తెలుసు. కనుక, బొమ్మలో MN అనే భాగం (భూమి నుంచి 1/2 డిగ్రీ కోణంలో కనిపించే భాగం) ACలో 115వ వంతు ఉంటుంది. A అనే బిందువు నుండి భూమి ఉపరితలానికి గీసిన లంబరేఖ కన్నా AC అనే రేఖ ఎక్కువ పొడవైనది. సూర్యకిరణాలు భూమి మీద 45^0 కోణంలో పడుతున్నాయనుకుంటే, అప్పుడు AC అనే రేఖ పొడవు సుమారు 140 మీటర్లు (హెలికాప్టరు ఎత్తు 100 మీటర్లు అయితే) MN అనే రేఖ పొడవు $140 \div 115 \approx 1.2$ మీటర్లు.

హెలికాప్టరుకి దాని నీడకీ గల నిష్పత్తి = MB అనే రేఖకీ, MN అనే రేఖకీ గల నిష్పత్తి (ఖచ్చితంగా చెప్పాలంటే ఇది 1.4 కి సమానం) కనుక $MB = 1.2 \times 1.4 \approx 1.7$ మీటర్లు.

ఈ లెక్కలన్నీ పరిపూర్ణమైన నల్లని నీడకి మాత్రమే వర్తిస్తాయి కాని, ఉపచ్ఛాయ (Penumbra) కి వర్తించవు.

అన్నట్టు మన కథలో హెలికాప్టరుకి బదులు 1.7 మీటర్లు వ్యాసం గల రబ్బరు బంతి ఉన్నట్లయితే, భూమి మీద దాని పరిపూర్ణ ఛాయ అసలు ఏర్పడదు. అలుక్కుపోయి నట్లుండే ఉపచ్ఛాయ మాత్రమే కనబడుతుంది.

9. ఈ లెక్కను సాధించడానికి చివర నుంచి మొదలు పెడదాం. చేయవలసిన ప్రక్రియలన్నీ చేశాక చివర మూడు పోగులలోనూ సమాన సంఖ్యలో అగ్గిపుల్లలు ఉన్నాయని కదా అన్నారు. మొత్తం అగ్గిపుల్లల సంఖ్య (48) మారిపోలేదు కనుక, చిట్టచివర ఒక్కొక్క పోగులో 16 అగ్గిపుల్లలు ఉండాలన్నమాట.

కనుక, మూడు పోగులూ ఈ విధంగా ఉండాలి :

మొదటి పోగు	రెండవ పోగు	మూడవ పోగు
16	16	16

ఈ అమరికకి ముందు మొదటి పోగులో ఎన్ని పుల్లలున్నాయో సరిగ్గా అన్ని పుల్లలను 3వ పోగులో నుంచి తీసి కలిపాం కదా? కనుక ఇంతకు ముందు మొదటి పోగులో 8 పుల్లలు, మూడవ పోగులో 16 + 8 = 24 పుల్లలు ఉండి ఉండాలి.

మొదటి పోగు	రెండవ పోగు	మూడవ పోగు
8	16	24

ఇంతకు ముందు మూడవ పోగులో ఎన్ని పుల్లలున్నాయో అన్ని పుల్లలు రెండవ పోగులో నుంచి తీసి మూడవ పోగులో కలిపాం కదా? కనుక, ఇంతకుముందు మూడవ పోగులో 24లో సగం, అనగా 12 పుల్లలు ఉండి ఉండాలి. రెండవ పోగులో 16+12=28 పుల్లలు ఉండి ఉండాలి.

మొదటి పోగు	రెండవ పోగు	మూడవ పోగు
8	16+12=28	12

ఇంతకు ముందు రెండవ పోగులో ఎన్ని పుల్లలున్నాయో అన్ని పుల్లలు మొదటి పోగులో నుంచి తీసి రెండవ పోగులో కలిపాం కదా? కనుక, రెండవ పోగులో 14 పుల్లలు, మొదటి పోగులో 8 + 14=22 పుల్లలు ఉండి ఉండాలి.

మొట్టమొదటి పుల్లల అమరిక ఈ క్రింది విధంగా ఉండి ఉండాలి.

మొదటి పోగు	రెండవ పోగు	మూడవ పోగు
22	14	12

10. ఈ సమస్యని కూడా చివర నుండి మొదలు పెడితే సులభంగా సాధించవచ్చు.

మూడవసారి సంచిలోని డబ్బు రెట్టింపు అయ్యాక అందులో 1 రూ. 20 పైసలు ఉండి ఉండాలి. (ఈ డబ్బును అంతా ముసలివాడు తీసేసుకున్నాడు కదా?)

అంతకుముందు ఎంత ఉండి వుండాలి? ముసలివాడి వాటా ఇచ్చివేయగా సంచిలో మిగిలిన మొత్తం 60 పైసలు. కనుక, ముసలివాడికి వాటా ఇవ్వకముందు అందులో వున్న మొత్తం = 1.20 + 0.60 = 1 రూ. 80 పైసలు.

రెండవసారి రెట్టింపు అయిన తర్వాత సంచిలో ఉన్న సొమ్ము 1 రూ. 80 పైసలు కనుక, రెట్టింపు కాక ముందు సంచిలో ఉన్నది 90 పైసలు. మొట్టమొదటిసారి ముసలివాడికి వాటా రూ. 1.20 పైసలు ఇచ్చి వేసిన తరువాత మిగిలిన సొమ్ము ఇది. కనుక, ముసలివాడి వాటా ఇవ్వక ముందు అందులో 0.90 + 1.20 = రూ. 2.10 పైసలు ఉండి ఉండాలి. ఇది మొదటిసారి రెట్టింపు అయిన తరువాత సంచిలో ఉన్న సొమ్ము. కనుక రెట్టింపు కాక మునుపు వున్న సొమ్ము రూ.1.5 పైసలు పాపం! ఆ రైతు త్వరగా ధనవంతుడై పోవాలనే వెర్రి వ్యామోహంలో పడక ముందు అతని సంచిలో వున్న మొత్తం సొమ్ము ఇది.

లెక్క సరిపోయిందో లేదో చూద్దాం. సంచిలో ఉన్న సొమ్ము :

మొదటిసారి రెట్టింపు అయ్యాక	$1.05 \times 2 = 2.10$
మొదటిసారి వాటా ఇచ్చాక	$2.10 - 1.20 = 0.90$
రెండవసారి రెట్టింపు అయ్యాక	$0.90 \times 2 = 1.80$
రెండవసారి వాటా ఇచ్చాక	$1.80 - 1.20 = 0.60$
మూడవసారి రెట్టింపు అయ్యాక	$0.60 \times 2 = 1.20$
మూడవసారి వాటా ఇచ్చాక	$1.20 - 1.20 = 0$

11. మన క్యాలెండరు రోమనుల నుంచి సంప్రాప్తమైనది. జూలియస్ సీజర్‌కి పూర్వం సంవత్సరం మార్చిలో మొదలు అయ్యేది. అప్పుడు డిసెంబర్ పదవ నెలగా ఉండేది. ఆ తరువాత సంవత్సరానికి జనవరి ఒకటో తేదీకి మార్చేశారు కానీ, నెలల పేర్లు అలాగే ఉండిపోయాయి. ఆ పాత నెలల పేర్లకీ, వాటి వరుస సంఖ్యలకీ వ్యత్యాసం ఆ విధంగా వచ్చింది.

మాసం	అర్థం	ప్రస్తుతం దాని స్థానం
సెప్టెంబర్	సెప్టెమ్ – ఏడు	తొమ్మిదవది
అక్టోబర్	ఓక్టో – ఎనిమిది	పదవది
నవంబర్	నోవెమ్ – తొమ్మిది	పదకొండవది
డిసెంబర్	డెకా – పది	పన్నెండవది

12. మొట్టమొదటి మూడు అంకెల సంఖ్య ఏయే మార్పులు చెందిందో చూద్దాం. మొదట తలచుకున్న మూడు అంకెల సంఖ్యనే మళ్ళీ అదే సంఖ్య పక్కన రాశాం. అంటే ఒక సంఖ్యను తీసుకుని, దానిని 1000 చేత గుణించి దానికి అసలు సంఖ్యను కలిపినట్లయింది. ఉదాహరణకి

872,872 = 872,000 + 872.

అంటే అసలు సంఖ్యని 1001 చేత గుణించినట్లయింది అన్నమాట.

ఆ తరువాత ఏం చేశాం? దానిని 7 చేత, 11 చేత, 13 చేత వరుసగా భాగించాలి. లేక 7 × 11 × 13 లేక 1001 చేత భాగించినట్లు అయింది.

అంటే అసలు సంఖ్యని ముందర 1001 చేత గుణించి, ఆ తరువాత మళ్ళీ 1001 చేత భాగించాం. కనుక మొదలు పెట్టిన సంఖ్యే రావటంలో ఆశ్చర్యం ఏముంది?

ఈ చిక్కు ప్రశ్నల ప్రకరణాన్ని ముగించే ముందు, అంక గణితానికి సంబంధించిన మరో మూడు తమాషాలను చూపించదలచుకున్నాను. వాటిని మీ స్నేహితుల మీద ప్రయోగించవచ్చు. మొదటి రెండింటిలోనూ తలచుకున్న అంకెను చెప్పడం, మూడవ దానిలో కొన్ని ప్రత్యేక వస్తువులు ఎవరెవరి దగ్గర ఉన్నాయో చెప్పడం కనిపిస్తుంది.

ఈ తమాషాలన్నీ చాలాకాలంగా ప్రచారంలో ఉన్నవే. అవి మీకు తెలిసినవే అయి వుండవచ్చు. కాని అవి ఏ సూత్రాల మీద ఆధారపడి ఉన్నాయో చాలా మందికి తెలియదు. ఆ ప్రాథమిక సూత్రాలు తెలియకపోతే వాటి రహస్యాలను ఛేదించడం సాధ్యం కాదు. ఇందులో మొదటి రెండు ప్రశ్నల వివరణలూ తెలియడానికి ప్రాథమిక బీజ గణిత సూత్రాలు తెలియాలి.

13. కొట్టివేసిన అంకె

చాలా అంకెలు గల సంఖ్యను దేనినైనా కాగితం మీద రాసుకోమని మీ స్నేహితుడితో చెప్పండి. ఉదాహరణకి, 847 అనే సంఖ్యను రాసుకున్నాడనుకుందాం. ఆ సంఖ్యలో ఉన్న విడి విడి అంకెలను కూడి (8 + 4 + 7 = 19). వచ్చిన మొత్తాన్ని అసలు సంఖ్యలో నుంచి తీసివెయ్యమని చెప్పండి :

847 – 19 = 828

ఆ మిగిలిన సంఖ్యలో ఏదో ఒక అంకెను కొట్టివేసి, మిగిలిన అంకెలను కూడి, మొత్తం ఎంత వచ్చిందో మీకు చెప్పమని అడగండి. అప్పుడు మీ స్నేహితుడు కొట్టివేసిన అంకెను వెంటనే చెప్పెయ్యవచ్చు. అతడు మొదట రాసుకున్న సంఖ్య ఏమిటో తెలియకుండానే.

ఇది ఎలా చెయ్యడం?

చాలా సులభం. అతడు చెప్పిన మొత్తం 9 లోపు అయితే, 9లో నుంచి ఆ మొత్తాన్ని తీసివేస్తే కొట్టివేసిన సంఖ్య వస్తుంది. అతడు చెప్పిన మొత్తం 9 కన్నా ఎక్కువ, 18 కన్నా తక్కువ అయితే, దానిని 18 లో నుంచి తీసివేయగా మిగిలినదే కొట్టివేసిన అంకె. ఇలాగే ఆ మొత్తం 18 కీ, 27 కీ మధ్యలో ఉంటే, 27లో నుంచి తీసివేస్తే కొట్టివేసిన సంఖ్య వస్తుంది. ఇలాగే ఆ మొత్తాన్ని సమీపంలో ఉన్న తొమ్మిదో ఎక్కంలోని సంఖ్యలో నుంచి తీసివేయగా మిగిలినదే కొట్టివేసిన సంఖ్య.

ఉదాహరణకి, 828లో 8 అనే అంకెను కొట్టివేసి, మిగిలిన రెండు అంకెలను కూడి (8 + 2 = 10), మొత్తం 10 అని మీ స్నేహితుడు చెప్పాడనుకుందాం. అప్పుడు 18లో నుంచి 10 తీసివేస్తే వచ్చిన ఎనిమిదే అతడు కొట్టివేసిన సంఖ్య అని తెలుసుకోవచ్చు.

ఇది ఎలా జరుగుతోంది?

అతడు తలచుకున్న సంఖ్య ఏదైనా సరే, అందులో నుంచి ఆ అంకెల మొత్తాన్ని తీసివేస్తే వచ్చే సంఖ్యలో 9 నిశ్శేషంగా పోతుంది. బీజ గణితాన్ని ఉపయోగించి, తలచుకున్న సంఖ్యలో వందల స్థానంలో a, పదుల స్థానంలో b, ఒకట్ల స్థానంలో c ఉన్నాయనుకుందాం. అప్పుడు ఆ సంఖ్య యొక్క విలువ :

$100a + 10b + c$

ఇందులో నుంచి ఆ అంకెల మొత్తం $(a + b + c)$ ని తీసివేస్తే :

$100a + 10b + c - (a + b + c)$

$= 99a + 9b$

$= 9(11a + b)$ వస్తుంది.

మరి $9(11a + b)$ లో 9 నిశ్శేషంగా పోతుంది కదా? కనుక ఏ సంఖ్యలో నుంచి అయినా ఆ సంఖ్యలోని అంకెల మొత్తాన్ని తీసివేయగా మిగిలిన సంఖ్య 9 చేత నిశ్శేషంగా భాగించబడుతుంది.

ఒక్కొక్కప్పుడు మీ స్నేహితుడు చెప్పిన మొత్తం 9 చేత సరిగ్గా భాగింపబడేది అయి వుండవచ్చు (ఉదాహరణకి 45). అంటే, మీ స్నేహితుడు కొట్టివేసిన అంకె సున్నా గాని, తొమ్మిది గాని అయి వుండవచ్చు. అటువంటప్పుడు కొట్టివేసిన అంకె 0 కాని, 9 కాని అయి వుంటుంది అనగలమే గాని, అసందిగ్ధంగా చెప్పడం సాధ్యం కాదు.

ఇటువంటిదే మరో తమాషా. తలచుకున్న సంఖ్యలో నుంచి అంకెల మొత్తాన్ని తీసి వేయడానికి బదులు, ఆ తలచుకున్న సంఖ్యలోని అంకెలనే తోచినట్లు స్థానాలు మార్చి, ఒక సంఖ్యలో నుంచి మరో సంఖ్యను తీసివేయమని చెప్పండి.

ఉదాహరణకి, అతడు తలచుకున్న సంఖ్య 8247. ఇందులోని అంకెల స్థానములను మార్చి అప్పుడు మొదటి సంఖ్యలో నుంచి రెండవ సంఖ్యను తీసివేస్తే 8247−2748=5499 వస్తుంది (స్థానభ్రంశం చేయడం వల్ల మొదటి సంఖ్య కన్న పెద్ద సంఖ్య ఏర్పడితే, అప్పుడు పెద్ద సంఖ్యలో నుంచి చిన్న సంఖ్యను తీసివెయ్యాలి).

ఇప్పుడు 5499లో కొట్టివేసిన అంకె 4 అనుకుందాం. మిగిలిన అంకెలు 5, 9, 9 అని చెప్తే, వాటి మొత్తం 5+9+9=23 కనుక, దీనిని 27లో నుంచి తీసివేస్తే 4 వస్తుంది. ఇది కొట్టివేసిన సంఖ్య.

14. ఏమీ అడగకుండానే అంకె చెప్పడం

తోచిన ఏదో ఒక మూడు అంకెల సంఖ్యని కాగితం మీద రాసుకోమని మీ స్నేహితుడితో చెప్పండి. ఆ సంఖ్యలో ఒకట్ల స్థానంలో సున్న ఉండరాదు. వందల స్థానానికి, ఒకట్ల స్థానానికి భేదం అధమం 2 ఉండాలి.

ఇటువంటి సంఖ్యను రాసి, దానిని తిరగవెయ్యమనండి. అంటే ఒకట్ల స్థానమూ, వందల స్థానమూ తారుమారు అవుతాయి. అంతే, అప్పుడు మొదటి సంఖ్యకీ, రెండవ సంఖ్యకీ భేదం (పెద్ద సంఖ్యలో నుంచి చిన్న సంఖ్యని తీసివేసి) రాయమనండి. ఆ తరువాత ఈ భేదాన్ని ఇంతకుముందు చెప్పినట్లే తిరగేసి రాయమనండి అంతే. అలా చేయగా ఎంత వచ్చిందో నేను చెప్పేస్తాను అని అనండి.

ఉదాహరణకి : మీ స్నేహితుడు మొదట రాసిన సంఖ్య 467 అనుకుందాం. దానిని తిరగవేస్తే 764 అవుతుంది.

764	297
–	+
467	792
----	----
297	1089
----	----

దానిని పైన చూపినట్లు చేసుకుపోతే వచ్చే మొత్తమే (1089) మీరు చెప్పేది.

ఈ సమస్యను సమూలంగా అర్థం చేసుకోవడానికి సంఖ్యలోని మూడు స్థానాలను a, b, c అనే అక్షరాలతో సూచిద్దాం. ఇందులో c కన్న a విలువ అధమం 2 అధికం అనుకుందాం. అప్పుడు ఆ సంఖ్య విలువ :

$100a + 10b + c$

తిరగవేసిన అంకె :

$100c + 10b + a$ అవుతుంది.

ఈ రెండింటి భేదం : $99a - 99c$

దీనిని ఈ క్రింది విధంగా మార్పులు చేయవచ్చు :

$99a - 99c = 99\,(a-c) = 100\,(a-c) - (a-c)$

$= 100\,(a - c) - 100 + 100 - 10 + 10 - a + c$

$= 100\,(a - c - 1) + 90 + (10 - a + c)$

కనుక భేదంలో వివిధ స్థానాలు ఈ క్రింది విధంగా ఉంటాయి.

వందల స్థానంలో : $(a - c-1)$

పదుల స్థానంలో : 9

ఒకట్ల స్థానంలో : $(10 + c-a)$

దీనిని తిరగేస్తే :

$100\ (10+c-a) +90+(a-c-1)$ వస్తుంది.

ఈ రెండు సంఖ్యలనీ కూడితే :

$100\ (a-c-1) +90+10+c-a$

$+100\ (10+c-a) +90+a-c-1$

$= 100 \times 9 +180+9= 1089$ వస్తుంది.

కనుక a, b, c ల విలువలు ఏమైనప్పటికీ ఈ ప్రక్రియలు అన్నీ చేశాక చివరకు మిగిలే సంఖ్య ఎల్లప్పుడూ 1089 మాత్రమే ఉంటుంది. కనుక రాబోయే జవాబు మనకు ముందుగానే తెలుసునన్నమాట.

ఈ తమాషాని ఏ వ్యక్తి దగ్గరా పొరపాటున కూడా ఒక్కసారి కన్నా ఎక్కువ చేయకూడదు. అసలు కిటుకు అతనికి తెలిసిపోతుంది.

15. ఎవరి దగ్గర ఉంది ?

ఈ తెలివైన గమ్మత్తు చేయడానికి జేబులో ఇమిడిపోయే మూడు చిన్న చిన్న వస్తువులు కావాలి. ఉదాహరణకి, ఒక పెన్సిలు ముక్క, తాళం చెవి, చిన్న చాకు బాగా పనికి వస్తాయి. ఇవికాక బల్ల మీద ఒక పళ్ళెంలో 24 చింతగింజలో, అగ్గిపుల్లలో, గులకరాళ్ళో ఉంచాలి.

ముగ్గురు స్నేహితులను పిలిచి, ఒక్కొక్కరు పెన్సిలు, తాళం చెవి, చాకులలో ఒక్కొక్క వస్తువును మీకు తెలియకుండా తీసి దాచుకోమని చెప్పండి. మీరు ఆ గదిలో నుంచి బయటికి వెళ్ళిపోండి. ఎవరు ఏ వస్తువును దాచుకున్నారో చెప్పడం మీ వంతు.

దానికి చేయవలసిన తతంగం కొంత ఉంది. ఆ వస్తువులను ముగ్గురూ దాచుకున్నామని గదిలో నుంచి కేక వేసిన తరువాత, మీరు తలుపు తెరచుకుని లోపలికి వెళ్ళండి. పళ్ళెంలో ఉన్న గింజలలో నుంచి మీ స్నేహితులలో ఒకడికి ఒక గింజ, రెండవ

వాడికి రెండు గింజలు, మూడవ వాడికి మూడు గింజలు ఇవ్వండి. మీరు మళ్ళీ గదిలో నుంచి బయటికి వెళ్ళిపోయాక వాళ్ళు చెయ్యవలసిన పని ఏమిటంటే, పెన్సిల్ దాచుకున్నవాడు తన దగ్గర ఎన్ని గింజలు ఉన్నాయో అన్ని పళ్ళెంలోంచి తీసుకోవాలి. తాళం చెవి దాచుకున్నవాడు తన దగ్గర ఉన్న గింజలకి రెట్టింపు, చాకు దాచుకున్నవాడు తన దగ్గర ఉన్న గింజలకు నాలుగు రెట్లు పళ్ళెంలో ఉంచెయ్యాలని చెప్పి ఆ గదిలో నుంచి మీరు బయటికి వెళ్ళిపోవాలి.

మీ స్నేహితులు, మీరు చెప్పిన విధంగా చేశాక, గది తలుపులు తెరిచి మిమ్మల్ని లోపలికి రమ్మని పిలుస్తారు. మీరు లోపలికి వచ్చి, పళ్ళెంకేసి చూసి ఎవరు ఏ వస్తువును తీసుకున్నారో చెప్పెయ్యవచ్చు!

ఈ గారడీని మీరు ఒంటి చేతితో, మీకు కన్నుగలిపి రహస్యంగా సమాచారం అందజేసే అసిస్టెంట్ ఎవ్వరూ లేకుండానే, ఎవ్వరినీ ఏమీ అడగకుండానే ఏ వస్తువును ఎవరు దాచారో చెప్పెయ్యడం చాలా ఆశ్చర్యకరంగా కనిపిస్తుంది. కాని నిజానికి ఇందులో ఆశ్చర్యకరమైనది ఏదీ లేదు. అంతా గణితం మీద ఆధారపడి ఉంది. పళ్ళెంలో మిగిలిన గింజలను లెక్కపెట్టుకుంటే ఎవరు ఏ వస్తువును తీసుకున్నారో తెలిసిపోయింది. నిజానికి పళ్ళెంలో మిగిలే గింజలు మరీ ఎక్కువ ఏమీ కాదు. 1 నుంచి 7 వరకూ మిగలవచ్చు. వాటిని ఒక్క చూపులో లెక్క పెట్టెయ్యవచ్చు.

ఆ గింజలను లెక్కపెట్టుకుంటే మాత్రం ఎవరు ఏ వస్తువును తీసుకున్నారో ఎలా తెలుస్తుంది? చాలా సులభం. ఆ వస్తువులను ఏ క్రమంలో ఎవరు తీసుకున్నారో దాని మీద పళ్ళెంలో మిగిలిన గింజల సంఖ్య ఆధారపడి ఉంటుంది.

ఉదాహరణకి, మీ స్నేహితుల పేర్లు కామేశ్వరరావు (కె), లక్ష్మణరావు (ఎల్), మాధవరావు (ఎం) అనుకుందాం. దాచవలసిన వస్తువులు పెన్సిల్ (ఎ), తాళం చెవి (బి), చాకు (సి) అనుకుందాం. వారు ముగ్గురూ ఆ మూడు వస్తువులనూ ఈ క్రింద చూపిన ఆరు విధాలుగా మాత్రమే తీసుకోగలుగుతారు :

ఈ ఆరు రకాలుగా తప్ప మరో విధంగా ఆ వస్తువులను తీసుకోవడం సాధ్యం కాదు.

K	L	M
a	b	c
a	c	b
b	a	c
b	c	a
c	a	b
c	b	a

గదిలో నుంచి బయటికి వెళ్ళే ముందు నువ్వు కామేశ్వర్రావుకి 1 గింజను, లక్ష్మణరావుకి 2 గింజలను, మాధవరావుకి 3 గింజలనూ ఇచ్చేవు అనుకుందాం. *

పైకి చూపిన 6 రకాలతోనూ పళ్ళెంలో ఎన్నేసి గింజలు మిగులుతాయో చూద్దాం :

KLM	తీసుకున్న గింజలు	మొత్తం	పళ్ళెంలో మిగిలిన గింజలు
abc	1+1=2 ; 2+4=6 ; 3+12=15	23	1
acb	1+1=2 ; 2+8=10 ; 3+6=9	21	3
bac	1+2=3 ; 2+2=4 ; 3+12=15	22	2
bca	1+2=3 ; 2+8=10 ; 3+3=6	19	5
cab	1+4=5 ; 2+2=4 ; 3+6=9	18	6
cba	1+4=5 ; 2+4=6 ; 3+3=6	17	7

* ఈ విషయం మూలంలో అసందిగ్ధంగా చెప్పబడలేదు. ఇది చాలా అవసరం

– అనువాదకుడు.

పళ్ళెంలో మిగిలే గింజలు ఒక్కొక్క రకానికి ఒక్కొక్క విధంగా ఉండటం మీరు గమనించే ఉంటారు. కనుక పళ్ళెంలో మిగిలిన గింజలను లెక్కపెట్టుకుంటే ఏ వ్యక్తి దగ్గర ఏ వస్తువు ఉందో తెలిసిపోతుంది. ఆఖరుసారి గది నుంచి బయటికి వెళ్ళినపుడు ఈ పట్టికను మరొక్కసారిగా జాగ్రత్తగా చూచి జ్ఞాపకం పెట్టుకోవడం (మొదటి వరుస, చివరి వరుస జ్ఞాపకం ఉంచుకోవడం) అవసరం. ఉదాహరణకి, పళ్ళెంలో 5 గింజలు మిగిలాయి అనుకుందాం. పట్టిక ప్రకారం 5 గింజలుంటే bca అనేది వస్తువుల వరుస క్రమం. అంటే కామేశ్వర్రావు దగ్గర తాళం చెవి, లక్ష్మణరావు దగ్గర చాకు, మాధవరావు దగ్గర పెన్సిలు ఉన్నాయని తెలిసిపోతుంది కదా!

మొట్టమొదట మీరు ఎవరికి ఎన్నెన్ని గింజలు ఇచ్చారో జ్ఞాపకం పెట్టుకోవడం చాలా అవసరం. వాళ్ళ పేర్లను ఆకారాది క్రమంలో గుర్తుంచుకుని, గింజలను మొట్టమొదట ఆ క్రమంలోనే ఇవ్వడం తేలిక. ఇక్కడ ఇదే పని చేశాం.

2వ ప్రకరణం

ఆటలలో గణితం

"డామినో" ఆట*

"డామినో" ఆట*

16. 28 బిళ్ళల గొలుసు

డామినో ఆట తాలూకు రూల్సు పాటిస్తూ, 28 డామినో బిళ్ళలను గొలుసుగా అమర్చగలవా?

---

* ఈ ఆట రష్యాలో విరివిగా ఆడతారు. తెలుగువారికి ఈ ఆట బొత్తిగా అపరిచితం కనుక, వీటితో తమాషాలు చూపించడానికి ముందు ఈ ఆటను గురించీ, అందులో ఉపయోగించే డామినో బిళ్ళలను గురించీ టూకీగా వివరిస్తాను.

28 దీర్ఘచతురస్రాకారపు బిళ్ళలతో ఈ ఆట ఆడతారు. ప్రతి బిళ్ళను రెండు సమాన చతురస్రములుగా విభజిస్తూ ఒక నెరద ఉంటుంది. ఈ చతురస్రములలో ఒక వైపున బిళ్ళలకి సున్నా నుంచి ఆరు వరకూ చుక్కలు ఉంటాయి, రెండో వైపున ఖాళీగా వుంటుంది.

ఉదాహరణకి, ఆ డామినో బిళ్ళలు ఎలా వుంటాయో ఇక్కడి బొమ్మలలో (5, 6, 7, 8) చూడవచ్చు.

17. గొలుసు యొక్క రెండు కొసలు

డామినో బిళ్ళల గొలుసులో ఒక కొసను 5 చుక్కలు వుంటే, రెండవ కొసను ఎన్ని చుక్కలు వుంటాయి?

18. డామినోలతో తమాషా

నీ స్నేహితుడొకడు డామినో బిళ్ళలలోంచి ఏదో ఒక బిళ్ళను తీసి జేబులో వేసుకుని, మిగిలిన 27 బిళ్ళలతోనూ గొలుసు తయారు చేయమనీ, ఏ బిళ్ళను దాచేసినా సరే మిగిలిన బిళ్ళలతో గొలుసు తయారు చేయడం సాధ్యమేననీ చెప్పి వెళ్ళిపోయాడనుకో.

→ ఆ 28 డామినో బిళ్ళలలోని చుక్కల అమరిక ఈ క్రింది విధంగా ఉంటుంది:

(0–0); (0–1); (0–3); (0–4); (0–5); (0–6); (1–1); (1–2); (1–3); (1–4); (1–5); (1–6); (2–2); (2–3); (2–4); (2–5); (2–6); (3–3); (3–4); (3–5); (3–6); (4–4); (4–5); (4–6); (5–5); (5–6); (6–6).

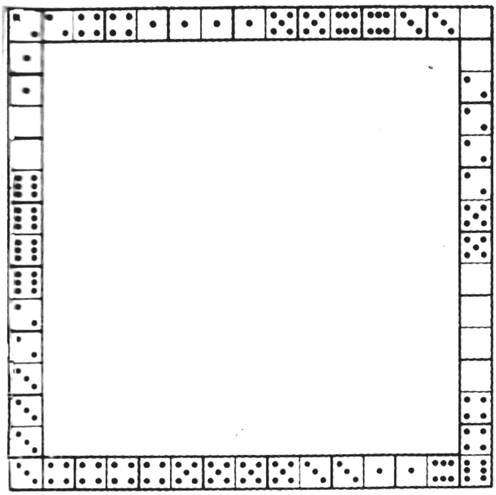
ఇందులో (0–0); (1–1); (2–2); (3–3); (4–4); (5–5); (6–6) అనేవి ఏడు జంటలు.

ఇది ఆరుల సెట్టు : ఈ ఆట పద్ధతి ఏమిటంటే, 28 బిళ్ళలనూ ముందర బోర్లా వేసి (చుక్కలు కనబడకుండా), కలిసి, నలుగురు ఆటగాళ్ళు, ఏడేసి బిళ్ళల చొప్పున పంచుకుంటారు. సాధారణంగా (6–6) జంట వచ్చినవాడు, ఆ బిళ్ళను తిరగేసి బల్లమీద పెట్టి ఆట మొదలు పెడతాడు. తరువాత వాడు 6 చుక్కల సెట్టులో మరో బిళ్ళ ఏదైనా (తన దగ్గర ఉంటే) దానిని బల్ల మీద ఉన్న ఒక ఆరుతో తన ఆరును మేచ్ (Match) చేస్తూ (తగిలేలాగ) పెట్టాలి. ఉదాహరణకి (6–3) బిళ్ళను బల్ల మీద ఉన్న ఒక 6తో మేచ్ చేస్తూ పెట్టాడనుకుందాం (6 సెట్టులో బిళ్ళ ఏదీ అతని దగ్గర లేకపోతే అతని ఛాన్సు పోతుంది), ఇప్పుడు బిళ్ళల గొలుసుకి ఒక చివర 7, రెండో చివర 3 చుక్కలు ఉన్నాయి. కనుక తరువాత కూర్చున్న ఆటగాడు తన దగ్గర ఉన్న బిళ్ళలలో నుంచి 6 తో గాని, 3తో గాని మేచ్ చేస్తూ ఒక బిళ్ళను పెట్టవచ్చు. అతడు పెట్టినది (6–0) బిళ్ళ అనుకుందాం. ఇప్పుడు గొలుసు యొక్క ఒక కొసను సున్నా, మరో కొసను మూడు వుంది. కనుక తరువాత కూర్చున్న ఆటగాడు ఈ రెండు అంకెలలో దేనితో మేచ్ అయ్యే బిళ్ళనైనా బల్ల మీద పెట్టి గొలసును పొడిగించవచ్చు. ఎవరి చేతిలో బిళ్ళలు ముందుగా అయిపోతే వాడు గెలిచినట్లు. ఉదాహరణకి ఆ గొలుసు 8వ బొమ్మలో చూపించబడినట్లు ఉండవచ్చు.

– అనువాదకుడు.

అప్పుడు మిగిలిన 27 బిళ్ళలతోనూ గొలుసు తయారు చేయగలిగావు అనుకుందాం. మీ స్నేహితుడు అన్న మాట నిజమేనని ఆశ్చర్యపడతావు. అంతేకాదు, మీ స్నేహితుడు నువ్వు తయారు చేసిన గొలుసును చూడనైనా చూడకుండానే, ఆ గొలుసు యొక్క రెండు చివరల నున్న చుక్కల సంఖ్యలను చెప్పెయ్యగలగడం మరింత ఆశ్చర్యకరంగా ఉంటుంది.

అతడికి ఆ గొలుసు చివరి చుక్కలు ఎలా తెలిశాయి? 27 బిళ్ళలతో గొలుసు తయారు చేయడం సాధ్యమేనని అతడు అంత ధీమాగా ఎలా అన్నాడు.



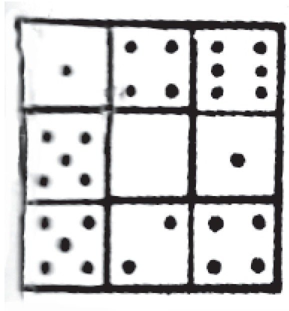
5వ బొమ్మ

19. డామినో చదరంగం

డామినో ఆట సూత్రాలను పాటిస్తూ 28 డామినో బిళ్ళలతో తయారు చేసిన చదరపు చట్రం ఒకటి 5వ బొమ్మలో చూపబడింది. ఈ చట్రానికి భుజముల పొడవులు సమానమే కాని, ఒక్కొక్క భుజంలో ఉన్న చుక్కల సంఖ్యలు మాత్రం సమానం కావు. ఉత్తర భుజంలో 44 చుక్కలు, పశ్చిమ భుజంలో 44 చుక్కలు, దక్షిణ భుజంలో 59 చుక్కలు, తూర్పు భుజంలో 32 చుక్కలూ ఉన్నాయి.

నాలుగు భుజములలోనూ సమాన సంఖ్యలో (44) చుక్కలు ఉండేటట్లు డామినో బిళ్ళలను అమర్చగలవా?

20. ఏడు చదరాలు



6వ బొమ్మ

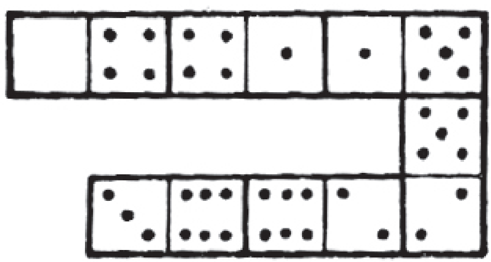
6వ బొమ్మలో 4 డామినో బిళ్ళలతో తయారు చేసిన చదరం ఉంది. ఈ చదరంలో అన్ని భుజములలోనూ సమాన సంఖ్యలో (11 చొప్పున) చుక్కలున్నాయి.

28 బిళ్ళలతో ఇటువంటి చదరాలు ఏడు తయారు చేయగలవా? అన్ని చదరాల భుజాలలోనూ ఒకే సంఖ్యలో చుక్కలు వుంటాలని ఏమీ లేదు. ఏ చదరానికాచదరంలో నాలుగు భుజాలలోనూ చుక్కల సంఖ్య సమానంగా ఉంటే చాలు.

21. మాజిక్కు చదరాలు

7వ బొమ్మలో 18 డామినో బిళ్ళలతో తయారు చేసిన చదరం ఒకటి ఉంది. ఈ చదరం ప్రత్యేకత ఏమిటంటే అడ్డంగా, నిలువుగా, ఏటవాలుగా ఎటు కూడినా చుక్కల సంఖ్య సమానంగా ఉంటుంది. ఇటువంటి చదరాలకు "మాజిక్కు చదరాలు" అని అనుశ్రుతంగా వస్తూన్న పేరు.

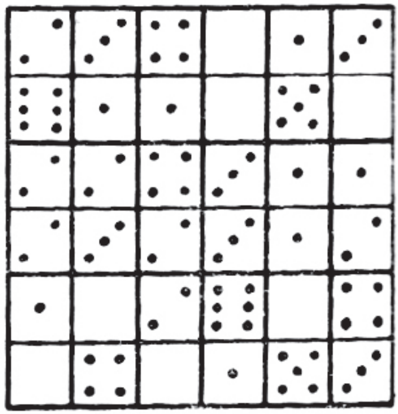
ఇటువంటి మాజిక్కు చదరాలు పద్దెనిమిదేసి బిళ్ళలు ఉపయోగిస్తూ, మరికొన్ని తయారు చేయండి చూద్దాం. ఈ చదరాలలో అన్నింటి కన్న తక్కువ మొత్తం 13, అన్నింటి కన్న ఎక్కువ మొత్తం 23 అయి వుండాలి.



7వ బొమ్మ

22. డామినోలతో శ్రేణి

డామినో ఆట సూత్రలను అనుసరిస్తూ 6 డామినో బిళ్ళల గొలుసు ఒకటి 8వ బొమ్మలో చూపబడింది. ఇందులోని ప్రత్యేకత ఏమిటంటే బిళ్ళలోని మొత్తం చుక్కల సంఖ్య వెళ్ళిన కొద్దీ ఒక్కొక్కటి చొప్పున పెరుగుతూ వెడుతుంది; మొదటి బిళ్ళలో మొత్తం 4 చుక్కలూ, రెండవ బిళ్ళలో 5 చుక్కలూ, మూడవ బిళ్ళలో 6 చుక్కలూ, నాలుగవ బిళ్ళలో 7, ఐదవ బిళ్ళలో 8, ఆరవ బిళ్ళలో 9 చుక్కలూ ఉన్నాయి.



8వ బొమ్మ

వెళ్ళిన కొద్దీ సమానమైన అంతరంతో హెచ్చుతూ (లేక తగ్గుతూ) ఉండే అంకెల శ్రేణిని సమాంతర శ్రేణి (Arithmetic Progression) అంటారు. మన గొలుసులో చుక్కల సంఖ్య వెళ్ళిన కొద్దీ ఒక్కొక్కటి చొప్పున పెరిగింది కానీ, ఈ అంతరం మరే సంఖ్య అయినా కావచ్చు. ఆరేసి బిళ్ళలతో ఇటువంటి శ్రేణులు మరికొన్ని తయారుచెయ్యి.

పదిహేను అంకెల పజిల్

1 నుండి 15 వరకూ అంకెలు ఉన్న 15 బిళ్ళలు గల చిన్న పెట్టెకి బోలెడంత చరిత్ర ఉంది. దానితో ఆడే వాళ్ళల్లో చాలామందికి ఈ సంగతి తెలియదు. జర్మన్ గణిత శాస్త్రజ్ఞుడు, గొప్ప డ్రాట్సు ఆటగాడూ అయిన డబ్ల్యు. అహ్రెన్స్ అనే ఆయన దాని గురించి ఇలా రాశాడు :

"1870–80 సంవత్సరాల మధ్య అమెరికాలో 'పదిహేను అంకెల పజిల్' అనే కొత్త ఆట బయలుదేరింది. అతి స్వల్ప కాలంలోనే ఆ ఆట దేశం అంతా అలుముకు పోయింది.

ఈ వెర్రి త్వరలోనే యూరప్‌కి పాకింది. ఎక్కడ చూసినా ఇదే ఆట. ఆఖరికి బస్సులలో ప్రయాణం చేస్తూ కూడా ఈ ఆటే. ఆఫీసులలో పనివాళ్ళూ, దుకాణాలలో అమ్మకందారులూ ఈ ఆటలలో మునిగిపోయి తమ పనులు అలక్ష్యం చేయడంతో, పని వేళలలో ఈ ఆట ఆడరాదు అని యజమానులు అభ్యంతరం పెట్టవలసిన అవసరం ఏర్పడింది. కొందరు చురుకైన వాళ్ళు ఈ వేలం వెర్రి గమనించి పెద్ద ఎత్తున టోర్నమెంటులు ఏర్పాటు చేయడం మొదలు పెట్టారు."

ఈ ఆట ఆఖరికి జర్మన్ పార్లమెంట్‌లోకి కూడా వెళ్ళింది. తలలు నెరిసిన పార్లమెంట్ సభ్యులు కూడా ఈ పజిల్ పెట్టె మీదకి వంచిన తలలు ఎత్తకుండా దీర్ఘాలోచనలలో మునిగిపోయి ఉండేవారని జర్మన్ పార్లమెంట్ డిప్యూటీ, జియోగ్రాఫరూ, గణిత శాస్త్రజ్ఞుడూ అయిన, సిగ్మండ్ గుంథర్ అనే ఆయన రాశాడు.

పారిస్ వీధులలో ఈ ఆట ముమ్మరంగా సాగేది. త్వరలో పల్లెటూళ్ళకి కూడా పాకింది. "ఈ ఆట ప్రవేశించని ఇల్లు లేకుండా పోయిందని" ఒక ఫ్రెంచి రచయిత రాశాడు.

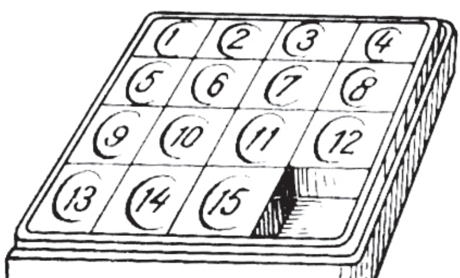
1880 నాటికి ఈ వెర్రి మరీ ముదిరిపోయింది. అంతలో ప్రముఖ గణిత శాస్త్రజ్ఞులు అన్ని మూలల నుంచీ రంగంలో దూకి, దీని గుట్టుమట్లు అన్నీ బయటపెట్టి, ఈ రాక్షసిని ఓడించి పారేశారు. ఈ పజిలులో కొన్ని రకాల అమరికలు (Arrangements) మాత్రమే సాధ్యమనీ, మిగిలినవి అసాధ్యమనీ నిర్ణయించారు.

కొన్ని కొన్ని సమస్యలు ఎందుకు అసాధ్యమో, అటువంటి అసాధ్య సమస్యలకే పెద్ద పెద్ద బహుమతులు ఇస్తామని టోర్నమెంట్ ఆర్గనైజర్లు బట్టబయలు చేశారు. ఈ 15 అంకెల పజిల్‌ను కనిపెట్టిన "శామ్ లాయడ్" అనే ఆయన ఈ విషయంలో అందరికన్న ఘటికుడు.

పదిహేను అంకెల పజిలుతో ఒక సమస్యని తయారుచేసి, దానిని సాధించినవాళ్ళకి వెయ్యి డాలర్లు బహుమానం ఇస్తామని ప్రకటించవలసిందిగా ఒక న్యూయార్క్ పత్రికను కోరాడు. కాని, అంత పెద్ద మొత్తం ఇస్తామని ప్రకటించడానికి ఆ పబ్లిషరు సందేహించాడు. అప్పుడు బహుమతి మొత్తాన్ని తానే ఇస్తానని శాయ్ లాయడ్ హామీ ఇచ్చాడు. ఇటువంటి పజిల్సుకి, చిక్కు ప్రశ్నలకి లాయడ్ సుప్రసిద్ధుడు.

తమాషా ఏమిటంటే ఈ పజిలుకి అమెరికాలో పేటెంట్ కోసం శాయ్ లాయడ్ దరఖాస్తు పెట్టగా అనుమతి దొరకలేదు. పేటెంట్ ఆఫీసు రూల్సు ప్రకారం అది ఎలా పనిచేస్తుందో చేసి చూపిస్తేనే గాని పేటెంట్ ఇవ్వకూడదు. పేటెంట్ ఆఫీసులో వారు ఈ పజిల్ సాధ్యమేనా అని అడిగితే, గణితశాస్త్ర రీత్యా సాధ్యం కాదన్నాడట లాయడ్. "మరి ఇంకేం? ఎలా పనిచేస్తుందో చూపించలేకపోయావు కనుక పేటెంట్ దొరకదు" అన్నారట. లాయడ్ అంతటితో వదిలేశాడు కానీ, ముందు ముందు తన పజిలుకి లభించబోయే అసాధారణ విజయ పరంపరలని అతడు ఏమాత్రం ఊహించగలిగినా పేటెంట్ కోసం చాలా తంటాలు పడి వుండేవాడు.

ఆ పజిల్‌ని గురించి లాయడ్ స్వయంగా చెప్పిన కొన్ని విషయాలు ఇక్కడ చూపిస్తాను : "1870 సంవత్సర ప్రాంతంలో 15 అంకెల పజిలు అనే పేరుతో ప్రపంచాన్ని ఓ ఊపు ఊపేసిన, నేను కనిపెట్టిన 15 కదిలే బిళ్ళలు గల పెట్టె సంగతి, పజిల్సు అంటే అభిమానం ఉన్న వాళ్ళకు తప్పకుండా జ్ఞాపకం ఉండే ఉంటుంది (9వ బొమ్మ). ఇందులో మొదటి 13 బిళ్ళలూ వరుస క్రమంలోనే ఉన్నాయి (10వ బొమ్మ). 14, 15 అంకెలు గల బిళ్ళల స్థానాలు మాత్రమే తారుమారు అయ్యాయి (11వ బొమ్మ). ఇప్పుడు చేయవలసిన పని ఏమిటంటే ఈ బిళ్ళలను ఒక్కటొక్కటిగా కదుపుతూ 14, 15 అంకెల బిళ్ళలను కూడా వరుస క్రమంలోకి తీసుకురావాలి.



9వ బొమ్మ : పదిహేను అంకెల పజిల్

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

10వ బొమ్మ : క్రమ పద్ధతిలో ఉన్న బిళ్ళలు (1వ క్రమం)

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

11వ బొమ్మ : అసాధ్యం (2వ క్రమం)

12వ బొమ్మ : బస్సులలో, ఆఫీసులలో, దుకాణాలలో, పార్కుల్లో, ఎక్కడ చూసినా ఇదే ఆట. ఆఖరికి ఈ ఆట ఆడకూడదని యజమానులు అభ్యంతరం పెట్టవలసి వచ్చింది.

“జనాభా యావత్తు ఈ పజిలును సాల్వు చేయడానికి నానా శ్రమా పడ్డారు. కానీ, నేను ఇస్తానని ప్రకటించిన వెయ్యి డాలర్ల బహుమతి మొత్తాన్ని గెలుచుకున్న వాళ్ళు లేరు.

“ఈ పజిలు సాల్వు చేయడంలోపడి దుకాణాలు తెరవడం మరిచిపోయిన వర్తకులు, రాత్రి తెల్లవార్లూ నిద్ర మానుకుని సొల్యూషన్ కోసం ప్రయత్నించిన పెద్ద పెద్ద ఆఫీసర్లూ.... అదంతా ఒక హాస్యరసగాథ. సొల్యూషన్ తమకు అందుబాటులోనే

ఉన్నదన్న అచంచలమైన విశ్వాసంతో ప్రయత్నాలు విడిచిపెట్టలేకపోయారు ప్రజలు. పజిలు సాల్వు చేస్తూ నావికులు ఓడలను ఇసుక దిబ్బలు పట్టించారు. రైలు డ్రైవర్లు స్టేషన్లు మరిచిపోయారు, రైతులు తమ నాగళ్ళు మూలపడేశారు.”

* * *

ఈ పజిలు తాలూకు రూల్సు వివరిద్దాం. మొత్తం మీద ఇది బహు క్లిష్టమైన ఆట. ఉన్నత బీజ గణిత సిద్ధాంతాలతో (Theory of Determinants) పెనవేసుకుని ఉన్నది. దీనిని గురించి అహ్రెన్స్ ఈ విధంగా రాశాడు :

“అసలు చేయవలసిన పని ఏమిటంటే, పజిలు పెట్టెలో ఉన్న ఒకే ఒక ఖాళీ ప్రదేశంను ఉపయోగించుకుంటూ బిళ్ళలను కలుపుతూ ఆఖరికి 15 బిళ్ళలూ వరుస క్రమంలో ఉండేటట్లు చెయ్యాలి. అంటే, పైన ఎడమ వైపు మూలగడిలో 1వ బిళ్ళ, దానికి కుడివైపు గడిలో 2వ బిళ్ళ, దాని తరువాత 3వ బిళ్ళ, కుడివైపు మూల గడిలో 4వ బిళ్ళ, తరువాత వరుసలో 5, 6, 7, 8 సంఖ్యలు గల బిళ్ళలు.... ఈ విధంగా 10వ బొమ్మలో చూపినట్లు అమర్చాలి.

“ఉదాహరణకి, బిళ్ళలన్నీ అడ్డదిడ్డంగా, క్రమం లేకుండా పెట్టెలో ఉన్నాయనుకుందాం. బిళ్ళలను పైన చెప్పినట్లు కదుపుకుంటూ వెళ్ళి 1వ బిళ్ళను పై వరుసలో ఎడమ మూల గడిలోకి వచ్చేటట్లు చేయడం నిస్సందేహంగా సాధ్యమే. అలాగే 1వ బిళ్ళకి కుడివైపు గడిలోకి 2వ బిళ్ళను రప్పించడమూ సాధ్యమే. అలాగే 3వ బిళ్ళనూ, 4వ బిళ్ళనూ కూడా వాటి వాటి స్థానాలకు రప్పించడం సాధ్యమే. అంటే 1, 2, 3, 4 బిళ్ళలు ఉండవలసిన స్థానాలలో ఉన్నాయి. కనుక ఇంక వాటిని కదపకుండా అలాగే ఉంచి మిగిలిన వాటి సంగతి చూద్దాం. పైన చెప్పినట్లే 5, 6, 7, 8 సంఖ్యల బిళ్ళలను రెండవ వరుసలో యధాస్థానాలలోకి రప్పించడం సాధ్యమే. తరువాత 9, 13 సంఖ్యల బిళ్ళలను 3వ, 4వ వరుసల ఎడమ మూల గళ్ళల్లోకి తీసుకురావచ్చు. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 13 సంఖ్యల బిళ్ళలను యధాస్థానాలలోకి చేర్చడం అయాక వాటిని ఇంక కదుపకూడదు. ఇంకా ఆరు గళ్ళు మాత్రం మిగులుతాయి. వాటిలో ఒకటి ఖాళీ. మిగిలిన వాటిలో 10, 11, 12, 14, 15 సంఖ్యల బిళ్ళలు అడ్డదిడ్డంగా పడి వుంటాయి. ఇప్పుడు 10, 11, 12 సంఖ్యల బిళ్ళలను వాటి యధాస్థానాలలోకి తీసుకురావడం సాధ్యమే. సందేహం లేదు. ఇది కూడా అయ్యాక ఇంక 14, 15 సంఖ్యల బిళ్ళలు నాలుగవ వరుసలో 10వ బొమ్మలో చూపినట్లు (అక్రమ పద్ధతిలో) గానే మిగిలిపోతాయి.

దీనిని బట్టి ఈ క్రింది నిర్ణయాలకు రావచ్చు (కావాలంటే పాఠకుడు స్వయంగా పరీక్షించి చూసుకోవచ్చు).

"ఎంత చిందర వందరగా ఉన్న బిళ్ళ అమరిక అయినా సరే 10వ బొమ్మలో చూపిన క్రమంలోకి (1వ క్రమంలోకి) గానీ, లేదా 11వ బొమ్మలో చూపిన క్రమంలోకి (2వ క్రమంలోకి) గానీ – ఈ రెండింటిలో ఒక పద్ధతిలోకి మాత్రమే తీసుకురావడం సాధ్యమవుతుందని తెలుస్తోంది.

"ఏదో ఒక అమరిక (Combination) సౌలభ్యం కోసం 'S' అనే అమరిక అనుకుందాం. ఈ అమరికను మార్పులు చేయడం ద్వారా 1వ క్రమంలోకి తీసుకు రాగలిగాం అనుకుందాం. దానిని మళ్ళీ ప్రతిలోమ క్రమంలో (reverse order) వెనుకకు మార్పులు చేయడం కూడా సాధ్యమే. అంటే 1వ క్రమాన్ని 'S' అనే క్రమంలోకి మార్చవచ్చు. ఏమంటే, చేసిన ప్రతి మార్పునూ వెనుకకు నడిపించడం సాధ్యమే కదా! ఉదాహరణకీ, 12వ సంఖ్య గల బిళ్ళను ఖాళీ ప్రదేశంలోకి మార్చగలిగినప్పుడు దానిని మళ్ళీ పూర్వ స్థానంలోకి మార్చడం కూడా సాధ్యమే.

"కనుక, మొత్తం బిళ్ళల అమరికలన్నీ రెండు రకాలుగా ఉంటాయి. వీటిలో ఒక జాతి అమరికలన్నిటినీ మార్పులు చేయడం ద్వారా 1వ క్రమంలోకి తీసుకురావచ్చు. ఇకపోతే 2వ జాతి అమరికలన్నీ 2వ క్రమంలోకి తీసుకురావచ్చు. అలాగే ప్రతిలోమ పద్ధతిలో 1వ క్రమంలో బయలుదేరి మార్పులు చేసుకుంటూ వెడితే మొదటి జాతి అమరికను దేనినైనా సాధించవచ్చు. అదే విధంగా 2వ క్రమంతో మొదలుపెట్టి 2వ జాతి అమరికలన్నింటినీ సాధించవచ్చు. ఒక్కమాటలో చెప్పాలంటే ఏ జాతికి ఆ జాతి వేరు వేరుగా అన్ని అమరికలనూ సాధించవచ్చు.

"అయితే 1వ క్రమాన్ని 2వ క్రమంలోకి మార్చడం సాధ్యమేనా? ఎంత ప్రయత్నించినా, ఎన్ని లక్షల మార్పులు చేసినా ఇది అసాధ్యం (గణిత శాస్త్రపు రుజువుల జోలికి పోవద్దు). కనుక, చెప్పదలచుకున్నదేమిటంటే, అనంత సంఖ్యాకములైన బిళ్ళల అమరికలన్నిటినీ రెండు గ్రూపులుగా విడదీయవచ్చు. ఒక గ్రూపు అమరికలన్నీ 1వ క్రమంలోకి మార్చవచ్చు. కనుక, ఈ సమస్యలన్నీ సాధ్యములే. ఇంక రెండవ గ్రూపులో అమరికలన్నీ 2వ క్రమంలోకి మారతాయి. కనుక ఈ సమస్యలన్నీ అసాధ్యములు. ఇదిగో, అసాధ్యమైన ఈ రెండవ గ్రూపు సమస్యలకే బ్రహ్మాండమైన బహుమతులిస్తామని ప్రకటించేవారు.

ఇచ్చిన సమస్య ఏ గ్రూపుకి చెందుతుందో తెలుసుకునే పద్ధతి ఏమైనా ఉందా? ఉంది. ఒక ఉదాహరణ ఇస్తే తెలుస్తుంది.

	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15

13వ బొమ్మ :

లాయడ్‌గారి మొదటి సమస్య

4	8	12	
3	7	11	15
2	6	10	14
1	5	9	13

14వ బొమ్మ :

లాయడ్‌గారి రెండవ సమస్య

"ఈ క్రింది అమరికను పరిశీలిద్దాం. మొదటి వరుసలో బిళ్ళలన్నీ ఉండవలసిన క్రమంలోనే ఉన్నాయి. రెండవ వరుసలో 5, 6, 7 బిళ్ళలు సక్రమంగానే ఉన్నాయి. తరువాత 8 ఉండవలసిన స్థానంలో 9 ఉంది. 8 కి ముందు 9 ఉంది. కనుక ఇది ఒక "అక్రమం". ఇటువంటి అక్రమాలు లెక్కపెట్టాలి. 12, 13, 11 లకి ముందు 14 ఉంది. ఇవి మూడు అక్రమాలు. (ఏమంటే, 12 ముందు 14 ఉంది; 13 ముందు 14 ఉంది; 11 ముందు 14 ఉంది). ఇప్పటికి మొత్తం 1 + 3 = 4 అక్రమాలు అయ్యాయి. ఇంకా 11కి ముందు 12 ఉంది. 11కి ముందు 13 ఉంది. ఇవి మరో రెండు అక్రమాలు. మొత్తం అక్రమాల సంఖ్య 6 అయింది. ఈ విధంగా (కింది వరుస కుడి మూల గడి ఖాళీగా ఉండేటట్లు ముందుగానే జాగ్రత్త పడి) మొత్తం ఎన్ని అక్రమాలు వున్నాయో లెక్కపెట్టాలి. మొత్తం అక్రమాల సరి సంఖ్యలో ఉంటే (ఈ ఉదాహరణలోలాగ) సమస్య సాధ్యమే. అక్రమాలు బేసి సంఖ్యలో ఉంటే ఆ సమస్య అసాధ్యం. అక్రమాల సంఖ్య సున్నా అయితే దానిని సరి సంఖ్యగా పరిగణించాలి. అది సాధ్యమే.

గణితశాస్త్ర వివరణ వచ్చాక ఈ పజిల్ వేలం వెర్రి త్వరలోనే అంతరించి పోయింది. సందేహాలకు కొంచెం కూడా చోటు లేకుండా విపులమైన గణిత సిద్ధాంతాలు తయారయ్యాయి. ఈ సమస్యలను సాధించడానికి ఊహాగానాలూ, తెలివితేటలూ అవసరం లేదు. కేవలం గణిత సిద్ధాంత విధుల మీదనే ఆధారపడి ఉంది."

సాధ్యములైన మూడు సమస్యలు ఈ క్రింద ఇచ్చాము. పరిశీలించండి.

23. మొదటి సమస్య

11వ బొమ్మలో ఉన్నట్లు బిళ్ళలను అమర్చి, వాటిని 13వ బొమ్మలో ఉన్నట్లు (పై వరుస ఎడమ మూల గడి ఖాళీగా ఉండేటట్లు) మార్పులు చెయ్యాలి.

24. రెండవ సమస్య

11వ బొమ్మలో ఉన్నట్లు, పెట్టెను 90 డిగ్రీలు తిప్పి (ఒక పక్కకి తిప్పి), అప్పుడు దానిని 14వ బొమ్మలో చూపినట్లు తయారు చెయ్యాలి.

25. మూడవ సమస్య

బిళ్ళలను ఈ పజిలు తాలూకు రూల్సు ప్రకారం నడిపించి, ఎటు కూడినా మొత్తం 30 వచ్చే మాజిక్కు చదరం చెయ్యాలి.

16 నుంచి 25 వరకు జవాబులు

16. సౌలభ్యం కోసం (0–0) ; (1–1) ; (2–2) వగైరా జంట బిళ్ళలను తీసి వేరే పెడదాం. ఇంక 21 బిళ్ళలు మిగులుతాయి. ఇందులో ప్రతి అంకె ఆరేసి సార్లు పునరావృతం (repeat) అవుతుంది. ఉదాహరణకి, ఈ క్రింది ఆరు బిళ్ళల మీద (సగభాగంలో) నాలుగేసి చుక్కలు ఉన్నాయి : (4–0); (4–1); (4–2); (4–3); (4–5); (4–6). ప్రతి అంకె సరి సంఖ్యలో పునరావృతం అవుతుంది. కనుక, వీటిని గొలుసులాగ కలపడం సాధ్యమేనన్నది విదితమే కదా? కనుక ఈ 21 బిళ్ళలతోనూ గొలుసు తయారు చేసి, మధ్యలో ఈ జంట బిళ్ళలను – రెండు సున్నాల మధ్య, రెండు ఒకట్ల మధ్య, రెండు రెళ్ళ మధ్య.... ఈ విధంగా చుక్కలు సరిపోయిన చోట్ల దూర్చవచ్చు. ఆ తరువాత 28 బిళ్ళల గొలుసును రూల్సు ప్రకారం ఏర్పాటు చేయవచ్చు.

17, 28 బిళ్ళలతో చేసిన గొలుసులో ఈ కొసా, ఆ కొసా ఒకే సంఖ్యలో చుక్కలు ఉండి తీరాలని రుజువు చేయవచ్చు. అలా కాని పక్షంలో గొలుసు చివరల ఉన్న చుక్కల సంఖ్య బేసిసార్లు పునరావృతం అయి ఉంటుంది (గొలుసు లోపల ఈ సంఖ్య ఎల్లప్పుడూ జంటలు జంటలుగానే ఉంటుంది). కాని, పూర్తి సెట్టులో ప్రతీ సంఖ్య ఎనిమిదేసి సార్లు పునరావృతం అవుతుంది. అంటే, పదిసార్లు అన్నమాట. కనుక, గొలుసు చివరల వేరు వేరు సంఖ్యల చుక్కలు ఉండవచ్చుననేది తప్పు అన్నమాట. కనుక రెండు చివరలా ఒకే సంఖ్య చుక్కలు ఉండి తీరాలన్నమాట.

అంటే, గొలుసు చివరల ఒకే సంఖ్య చుక్కలు ఉండి తీరాలనే ఈ లక్షణం చాలా చిత్రమైనది. దీనిని బట్టి 28 బిళ్ళల గొలుసు కొసలు కలిపి గొలుసులాగ తయారు చేయవచ్చు. కనుక, డామినో పూర్తి సెట్టును ఉపయోగించి, రూల్సు అన్నీ పాటించి, రింగులాగ చేయవచ్చును.

అయితే ఎన్ని రకాలుగా ఈ రింగును చేయువచ్చునో తెలుసా? విసుగు పుట్టించే లెక్కలు అన్నీ చూడటం దేనికి గానీ, మొత్తం 7 955 229 931 520 (లేక $2^{13} \times 3^{8} \times 5 \times 7 \times 4231$) వివిధ విధాలుగా ఈ రింగును చేయవచ్చు.

18. ఈ సమస్యకి జవాబు కొంతవరకూ పైన వివరించినదే. 28 డామినో బిళ్ళల పూర్తి సెట్టుతో రింగు తయారు చేయవచ్చునని పైన రాశాం కదా? కనుక వాటిలో నుంచి ఒక బిళ్ళను తీసి దాచేస్తే :

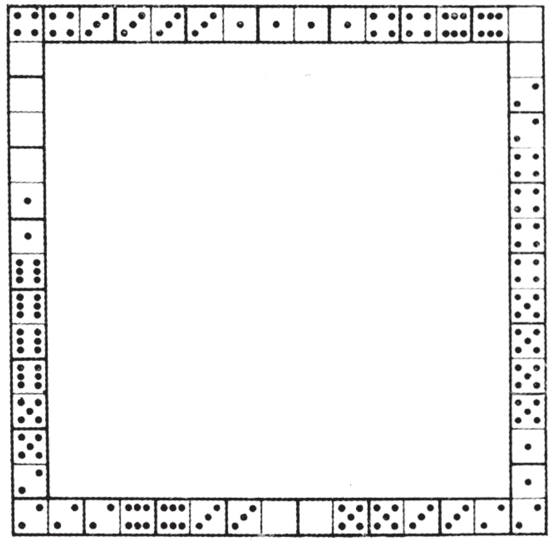
1. మిగిలిన 27 బిళ్ళలతో రింగులా చేయడం సాధ్యం కాదుగాని, గొలుసును తప్పకుండా చేయవచ్చును.

2. గొలుసు చివరల ఉన్న చుక్కల సంఖ్యలు, దాచిపెట్టిన బిళ్ళల తాలూకు రెండు భాగాల మీదనూ ఉన్న చుక్కలకు సమానం అవుతాయి.

కనుక, ఒక బిళ్ళను దాచిపెట్టి, తయారు చేయబోయే గొలుసు యొక్క చివరల ఏయే సంఖ్యల చుక్కలు ఉండబోతాయో ముందుగానే చెప్పవచ్చు.

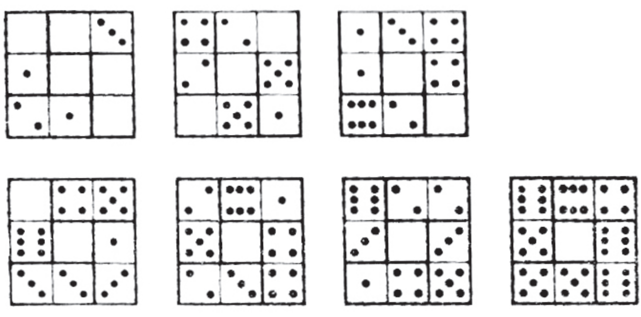
19. మనం తయారు చేయవలసిన చదరంలో ఒక్కొక్క భుజానికి 44 చొప్పున మొత్తం $44 \times 4 = 176$ చుక్కలు ఉండాలి. కాని, డామినో సెట్టులోని 28 బిళ్ళల మీది చుక్కల మొత్తం 168 మాత్రమే. అంటే, మరో 8 చుక్కలు అదనంగా కావాలి.

దీనికి కారణం ఏమిటంటే, చదరం యొక్క నాలుగు మూలలలో ఉన్న చుక్కలు రెండేసి సార్లు లెక్క పెట్టాము. అంటే, నాలుగు మూలలలో ఉండవలసిన చుక్కల మొత్తం 8 అన్నమాట. చదరాన్ని నిర్మించడానికి ఈ విషయం ఉపయోగపడుతుంది (నిజానికి ఈ విషయాన్ని ఉపయోగించుకోవడం అంత సులభమేమీ కాదు). సొల్యూషన్ 15వ బొమ్మలో చూపబడింది.



15వ బొమ్మ

20. దీనికి ఎన్నో సొల్యూషన్‌లు ఉన్నాయి. కాని, ఇక్కడ కొన్ని మాత్రమే చూపిస్తున్నాను. 16వ బొమ్మలో :

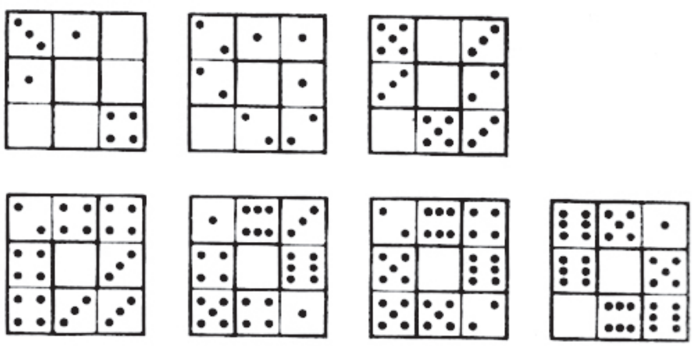


16వ బొమ్మ

భుజానికి	3 చుక్కలు గల	ఒక చదరం
భుజానికి	6 చుక్కలు గల	ఒక చదరం
భుజానికి	8 చుక్కలు గల	ఒక చదరం
భుజానికి	9 చుక్కలు గల	2 చదరాలు
భుజానికి	10 చుక్కలు గల	ఒక చదరం
భుజానికి	16 చుక్కలు గల	ఒక చదరం

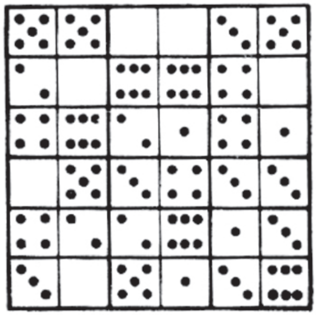
17వ బొమ్మలో :

భుజానికి	4 చుక్కలు గల	రెండు చదరాలు
భుజానికి	8 చుక్కలు గల	ఒక చదరం
భుజానికి	10 చుక్కలు గల	రెండు చదరాలు
భుజానికి	12 చుక్కలు గల	రెండు చదరాలు



17వ బొమ్మ

21. ఎటు కూడినా 18 చుక్కలు ఉండే మాజిక్కు చదరపు నమూనా ఒకటి 18వ బొమ్మలో ఉంది :



18వ బొమ్మ

22. అంతరం 2 గా గల రెండు శ్రేణులు, ఉదాహరణకి ఇక్కడ చూపబడ్డాయి.

ఎ) 0–0; 0–2; 0–4; 0–5; 4–4 (లేక 3–5); 5–5 (లేక 4–6).

బి) 0–1; 0–3; (లేక 1–2); 0–5 (లేక 2–3); 1–6 (లేక 3–4); 3–5 (లేక 4–5); 5–5.

6 బిళ్ళల శ్రేణులు మొత్తం 23 ఉన్నాయి.

ఎ) అంతరం 1 గా గల శ్రేణుల మొదటి బిళ్ళలు ఇక్కడ చూపబడ్డాయి.

0–0	1–1	2–1	2–2	3–2
0–1	2–0	3–0	3–1	2–4
1–0	0–3	0–4	1–4	3–5
0–2	1–2	1–3	2–3	4–4

బి) అంతరం 2గా గల శ్రేణుల మొదటి బిళ్ళలు :

0–0	0–2	0–1

23. ఈ సమస్యని ఈ దిగువ ఇచ్చిన 44 ఎత్తులలో సాధించవచ్చును.

14,	11,	12,	8,	7,	6,	10,	12,	8,	7,	4,
3,	6,	4,	7,	14,	11,	15,	13,	9,	12,	8,
4,	10,	8,	4,	14,	11,	15,	13,	9,	12,	4,
8,	5,	4,	8,	9,	13,	14,	10,	6,	2,	1.

24. ఈ సమస్యని ఈ దిగువన ఇచ్చిన 31 ఎత్తులలో సాధించవచ్చును.

14,	15,	10,	6,	7,	11,	15,	10,	13,	9,	5,
1,	2,	3,	4,	8,	12,	15,	10,	13,	9,	5,
1,	2,	3,	4,	8,	12,	15,	14,	9,	5,	1,
2,	3,	9,	8,	12.						

25. ఎటు కూడినా మొత్తం 30 వచ్చే మాజిక్కు చదరం ఈ క్రింది 50 ఎత్తులలో సాధించవచ్చు.

12,	18,	4,	3,	2,	6,	10,	9,	13,	15,	14,
12,	8,	8,	4,	7,	10,	9,	14,	12,	8,	4,
7,	10,	9,	6,	2,	3,	10,	9,	6,	5,	1,
2,	3,	6,	5,	3,	2,	1,	13,	14,	3,	2,
1,	13,	14,	3,	12,	5,	3.				

3వ ప్రకరణం

మరో పన్నెండు సమస్యలు

26. దారం

"ఏమిటీ, నీకు దారం ఇంకా కావాలా?" అంటూ ఆ పిల్లవాడి తల్లి బట్టలు ఉతుకుతూ రివ్వున బయటికి వచ్చింది. "దారం, దారం ఎంతసేపూ దారమేనా? ఏం, నన్ను దారంతోనే అల్లేరనుకుంటున్నావా? నిన్ననేగా ఉండకి ఉండ ఇచ్చానూ? దాంతో ఏం చేశావూ?

"ఏం చేశానా? అందులో సగం నువ్వే తీసుకున్నావుగా?" అన్నాడు పిల్లవాడు.

"బొంత మరి దేనితో కుట్టమంటావు?"

"మిగిలిన దాంట్లో సగం అన్నయ్య తీసుకున్నాడు, చెరువులో చేపలు పట్టడానికి."

"అన్నయ్యకిస్తే తప్పేం లేదు."

"అదే మరీ, మళ్ళీ అందులో సగం నాన్న తీసుకున్నాడు. ఏదో వేళ్ళాడదియ్యడానికని చెప్పి, మిగిలిన దాంట్లో 2/5వ వంతు చెల్లి తీసుకుంది జడలు అల్లుకోడానికి...."

"మరి మిగిలినదేమైంది?"

"30 సెం.మీ.గా మిగిలినదీ? దానితో టెలిఫోన్ ఆట నువ్వు ఆడగలవేమో చూసుకో."

ఇంతకీ మొట్టమొదట ఉండలో దారం ఎంత ఉండేదీ?

27. సాక్సూ - గ్లవ్సు

ఒక పెట్టెలో పది జతల గోధుమ రంగువీ, పదిజతల నల్లనివీ సాక్సు ఉన్నాయి. మరో పెట్టెలో పదేసి జతల గోధుమ రంగువీ, నల్లనివీ గ్లవ్సు ఉన్నాయి. ఏదైనా ఒకే రంగు గల సాక్సు జత, ఒక గ్లవ్సు జత ఏరి తీసుకోవాలంటే ఆ పెట్టెలలో నుంచి ఎన్ని సాక్సూ, ఎన్ని గ్లవ్సూ బయటికి తీయాల్సి వస్తుంది?

28. తల వెంట్రుకల ఆయుష్షు

సాధారణంగా మనిషి తల మీద ఎన్ని వెంట్రుకలు వుంటాయో తెలుసా? సుమారు 1 500 00*. సగటున నెలకి 3000 వెంట్రుకల చొప్పున రాలిపోతూ ఉంటాయి.

ఈ రెండు సంఖ్యలనీ ఉపయోగించి మనిషి తల వెంట్రుకల సగటు ఆయుఃప్రమాణం ఎంతో చెప్పగలరా?

29. జీతం - బత్తెం

నాకు జీతము, ఎక్కువ టైము పని చేసినందుకు బత్తెము కలిసి 130 రూబుళ్ళు వచ్చాయి. బత్తెం కన్నా నా జీతం 100 రూబుళ్ళు ఎక్కువ. అయితే బత్తెం లేకుండా ఉంటే నాకు ఎంత జీతం వస్తుంది?

30. స్కీయింగు

ఒకరు గంటకి 10 కి.మీ. వేగంతో స్కీయింగ్ చేస్తూ వెడితే, అతను వెళ్ళవలసిన చోటికి మధ్యాహ్నం ఒంటి గంటకి చేరుకుంటాడు. గంటకి 15 కి.మీ. వేగంతో వెడితే ఉదయం 11 గంటలకి చేరుకుంటాడు. సరిగ్గా మధ్యాహ్నం 12 గంటలకి చేరుకోవాలంటే ఎంత వేగంతో స్కీయింగు చెయ్యాలి?

---

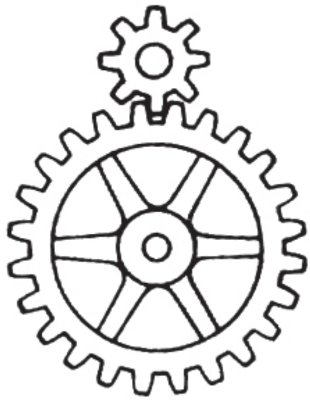
* తల వెంట్రుకల సంఖ్య ఎలా తెలిసిందా అని మీలో చాలామందికి సందేహం కలుగవచ్చు. వెంట్రుకలన్నీ ఒక్కొక్కటే లెక్క పెట్టారా? అక్కరలేదు. మనిషి తల మీద ఒక చదరపు సెం.మీ. స్థలం మాత్రం తీసుకుని, అందులో ఎన్ని వెంట్రుకలున్నాయో జాగ్రత్తగా లెక్క పెడతారు. తరువాత జుట్టు వున్న స్థలం వైశాల్యం కొలుస్తారు. దీనిని బట్టి మొత్తం తల మీద ఎంత జుట్టు ఉందో తెలుసుకుంటారు. అడవిలో చెట్ల సంఖ్యని లెక్కపెట్టే పద్ధతి ఇదే.

31. ఇద్దరు పనివాళ్ళు

ఇద్దరు పనివాళ్ళు – ఒకడు పడుచువాడు, మరొకడు ముసలివాడూనూ. ఒకే ఇంట్లో ఉంటూ, ఒకే మిల్లులో పని చేస్తున్నారు. ఇంటి నుంచి మిల్లుకి పడుచువాడు 20 నిమిషాలలోనూ, ముసలివాడు 30 నిమిషాలలోనూ చేరుకుంటారు. ముసలివాడు ఇంట్లో నుంచి 5 నిమిషాలు ముందుగా బయలుదేరితే పడుచువాడు అతనిని ఎప్పుడు కలుసుకుంటాడు?

32. టైపు చెయ్యడం

ఇద్దరు టైపిస్టులకు ఒక రిపోర్టు టైపు చెయ్యమని ఇచ్చారు. వాళ్ళలో సీనియర్ ఒక్కర్తీ ఆ పనినంతనీ 2 గంటలలో పూర్తి చేయగలదు. రెండవ టైపిస్టు ఒక్కర్తీ అయితే 3 గంటలలో పూర్తి చేస్తుంది. ఇద్దరూ కలిసి సాధ్యమైనంత త్వరలో పూర్తి అయేటట్లు ఆ పనిని పంచుకుని పనిచేస్తే ఎంతసేపట్లో పూర్తి అవుతుంది ?



19వ బొమ్మ : చిన్న పళ్ళ చక్రం ఎన్ని చుట్లు తిరుగుతుంది.

సాధారణంగా ఇటువంటి సమస్యలను సాధించే పద్ధతి ఇది. ఒక్క గంటలో ఆ టైపిస్టులు వేరు వేరుగా పనిలో ఎక్కువ భాగం పూర్తి చేయగలరో లెక్కవేసి, రెండూ కూడి, వచ్చిన మొత్తం చేత 1ని భాగిస్తే జవాబు వస్తుంది. మరో కొత్త పద్ధతిలో జవాబు కనుక్కోగలరేమో ప్రయత్నించండి.

33. రెండు పళ్ళ చక్రాలు

8 పళ్ళు గల చిన్న చక్రం, 24 పళ్ళు గల పెద్ద చక్రానికి కలుపబడింది. పెద్ద చక్రం చుట్టూ ఒకసారి తిరిగి రావడానికి, చిన్న చక్రం తన ఇరుసు తాను ఎన్నిసార్లు తిరగాలి?

34. వయస్సు ఎంత?

చిక్కు ప్రశ్నల మీద వల్లమాలిన మోజు ఉన్న ఒక ఆసామిని "నీ వయస్సు ఎంత?" అని అడిగాడు ఎవరో. దానికి అతగాడి సమాధానం వినండి.

"మరో 3 ఏళ్ళ తరువాత నా వయస్సును 3 రెట్లు చేసి, అందులో నుంచి 3 ఏళ్ళ క్రిందటి నా వయస్సుకి 3 రెట్లు తీసివేస్తే నా వయస్సు వస్తుంది." ఇంతకీ అతడి వయస్సు ఎంత?

35. మరో వయస్సు లెక్క

"ఇవనొవ్ వయస్సు ఎంత?" అని నా మిత్రుడొకడు నన్ను అడిగాడు.

"అతని వయస్సా? ఉండండి. 18 సంవత్సరాల క్రితం అయితే వాళ్ళ అబ్బాయి కన్నా 3 రెట్లు పెద్దవాడు. ఇప్పుడు వాళ్ళ అబ్బాయికి రెట్టింపు మాత్రమే వయస్సు."

"ఇంకేం మరీ? వాళ్ళిద్దరి వయస్సులూ తెలిసిపోతూనే వున్నాయి."

తమరేమంటారు పాఠక మహాశయా!

36. ద్రావకం తయారు చేయడం

ఒక సీసాలో కొంత హైడ్రోక్లోరిక్ ఏసిడ్ ఉంది. మరో సీసాలో సరిగ్గా అంతే ప్రమాణంలో నీళ్ళు ఉన్నాయి. ఆ రెంటితోనూ ద్రావకం తయారు చేయడానికి మొదటి సీసాలో నుంచి 20 గ్రాముల ద్రవం తీసి, రెండవ సీసాలో పోశారు. తరువాత రెండవ సీసాలో నుంచి 2/3 వ వంతు ద్రవం తీసి మొదటి సీసాలో పోశారు. అప్పుడు రెండవ సీసాలో కన్న మొదటి సీసాలో నాలుగు రెట్లు అధికంగా ద్రవం ఉంది.

మొట్టమొదట ఆ సీసాలలో ఎంతెంత ఏసిడూ, నీళ్ళూ ఉండేవి?

37. ఖర్చు

బజారుకి వెళ్ళే ముందు నా జేబులో రూబులు నోట్లూ, 20 కోపెక్కుల బిళ్ళలూ కలిపి సుమారుగా 15 రూబుళ్ళ సొమ్ము ఉంది. మళ్ళీ తిరిగి వచ్చాక చూసుకుంటే పూర్వం 20 కోపెక్కుల బిళ్ళలు ఎన్ని ఉండేవో అన్ని రూబులు నోట్లూ, రూబులు నోట్లు ఎన్ని ఉండేవో అన్ని 20 కోపెక్కుల బిళ్ళలూ ఉన్నాయి. తీసుకు వెళ్ళినప్పటి సొమ్ములో మూడో వంతు మాత్రమే ఇప్పుడు నా జేబులో ఉంది.

నేనే ఖర్చు పెట్టిన సొమ్ము ఎంత?

26 నుంచి 37 వరకూ జవాబులు

26. పిల్లవాడి తల్లి సగం దారం తీసేసుకోగా ఇంక 1/2 భాగం మిగిలింది. వాళ్ళ అన్నయ్య తీసుకున్నాక 1/4, వాళ్ళ నాన్న తీసుకున్నాక 1/8, వాళ్ళ చెల్లెలు తీసుకున్నాక 1/8 × 3/5 = 3/40 మిగిలింది 30 = 3/40 అయితే, మొట్టమొదట ఉండలోని దారం : 30÷3/40 = 400 సెం.మీ. లేక 4 మీటర్లు.

27. మూడు సాక్సు తీసుకుంటే చాలు, అందులో రెండు ఒకే రంగువి అయి తీరుతాయి. గ్లవ్సు విషయంలో ఇంత సులభంగా తేలిపోదు, ఏమంటే, వాటిలో వర్ణ భేదమే కాక, కుడి ఎడమల భేదం కూడా ఉంది. అధమం 21 గ్లవ్సు తీసుకోవాలి. ఏమంటే, 20 గ్లవ్సు తీసుకుంటే అవి అన్నీ ఎడమ చేతివే (10 నల్లనివీ, 10 గోధుమ రంగువీ) అయి ఉండవచ్చు.

28. పాత వెంట్రుకలు రాలిపోతూ ఉంటే వాటి స్థానంలో కొత్త వెంట్రుకలు పుట్టుకొస్తూ వుంటాయి. కనుక తల మీద వెంట్రుకల సంఖ్య సుమారుగా స్థిరంగానే ఉంటుంది (చిన్న వయస్సులో). మాట వరసకి ఈ రోజు నుంచీ కొత్త వెంట్రుకలు పుట్టడం మానేశాయి అనుకుందాం. ఈ నెలలో 3000 వెంట్రుకలు ఊడిపోతాయి. ఒక ఏడాదిలో 3000 × 12 = 36000 తగ్గిపోతాయి. కనుక, సుమారు 4 ఏళ్ళ తరువాత ఆఖరి వెంట్రుక రాలిపోతుంది. ఆ ఆఖరున రాలిపోయిన వెంట్రుక ఈ రోజున పుట్టినది అయి వుండాలి. కనుక, మనిషి తల మీది వెంట్రుకల సగటు ఆయుష్షు సుమారు 4 సంవత్సరాలు.

29. ఈ ప్రశ్నకి జవాబు రూ. 100 అని చటుక్కున అనేస్తారు ఆలోచించకుండా చాలామంది. అది తప్పు. ఏమంటే జీతం రూ. 100 అయితే బత్తెం : రూ. 130−100=30 అవాలి. అప్పుడు బత్తెం కన్నా జీతం రూ. 70 మాత్రమే అధికం అయింది, వంద కాదు.

ఈ లెక్కని ఈ విధంగా పరిష్కరించవచ్చు. బత్తెం కన్నా జీతం రూ. 100 అధికం అని మనకు తెలుసు. కనుక రూ. 130 కి రూ. 100 కలిపితే జీతానికి రెట్టింపు అవుతుంది. అంటే రూ. 130+100 = 230 జీతానికి రెట్టింపు. కనుక జీతం రూ. 115, బత్తెం = రూ. 15. సరిపోయిందో లేదో చూద్దాం.

115−15 = 100 ; 115+15 = 130

30. ఈ సమస్య రెండు కారణాలుగా చమత్కారమైనది. మొదటి కారణం ఏమిటంటే, 10 కి.మీ.కి, 15 కి.మీ.కి సరాసరి కట్టగా వచ్చిన 12.5 కి.మీ. మనకు కావలసిన వేగమని చాలామంది అనుకుంటారు. అది తప్పు. ఆ వ్యక్తి ప్రయాణం చేసిన దూరం ఎ. కి.మీ. అనుకుంటే, గంటలకి 15 కి.మీ. వేగంతో ప్రయాణం చేయగా a/15 గంటలలో అతడు అడంగు చేరుకుంటాడు. గంటకి 10 కి.మీ. వేగంతో ప్రయాణం చేస్తే a/10 గంటలలో చేరుకుంటారు. 12.5 కి.మీ. వేగంతో వెడితే a/12.5 = 2a/25 గంటలలో చేరుకుంటాడు. కనుక,

$$2a/25 - a/15 = a/10 - 2a/25$$

అయి వుండాలి. ఏమంటే, ఈ సమాజంలో కుడి ఎడమల విలువ ఒ గంట కదా. దీనిని సూక్ష్మీకరిస్తే,

$$2/25 - 1/15 = 1/10 - 2/25$$

లేదా $4/25 = 1/15 + 1/10$

కాని, ఈ సమీకరణం తప్పు. ఏమంటే, 1/15 + 1/10 = 1/6 లేదా 4/24కి సమానం అవుతుందే కాని, 4/25కి సమానం కాదు.

ఈ సమస్యలోని రెండవ చమత్కారం ఏమిటంటే, సమీకరణాల జోలికి పోనక్కరలేకుండా నోటితో కట్టవచ్చు.

చేసే పద్ధతి ఇది : గంటకి 10 కి.మీ. వేగంతో ప్రయాణం చేసినప్పటి కన్న 15 కి.మీ. వేగంతో వెళ్ళగా 2 గంటలు తక్కువ పట్టింది. కనుక, 15 కి.మీ. వేగంతో మరో రెండు గంటలు వెడితే 30 కి.మీ. అదనపు దూరం వెళ్ళగలిగి ఉండును. కాని, ఈ రెండు వేగాలకీ భేదం గంటకి 5 కి.మీ. కనుక, అతడు ప్రయాణం చేసిన మొత్తం కాలం : 30 ÷ 5 = 6 గంటలు. దీనిని బట్టి 15 కి.మీ. వేగంతో అతడు ప్రయాణం చేసిన కాలం : 6 – 2 = 4 గంటలు. దీనిని బట్టి ప్రయాణం చేసిన దూరం: 15 × 4 = 60 కి.మీ.

అతడు 12 గంటలకి అడంగు చేరుకోవాలంటే, ప్రయాణం చేసిన మొత్తం కాలం 5 గంటలు అవుతుంది. కనుక వేగం : 60 ÷ 5 = 12 కి.మీ.

మన జవాబు సరిగ్గా ఉన్నదో లేదో చూసుకోవడం కష్టమేమీ కాదు.

31. సమీకరణాలు లేకుండా ఈ లెక్కని అనేక విధాలుగా సాధించవచ్చు. మొదటి పద్ధతి : 5 నిమిషాలలో పడుచువాడు 1/4వ వంతు దూరం నడుస్తాడు, ముసలివాడు 1/6వ వంతు, అంటే 1/4 – 1/5 = 1/12వ వంతు తక్కువ నడుస్తాడు పడుచువాడికన్నా.

ముసలివాడు పడుచువాడికన్నా 15వ వంతు దూరం ఎదర ఉన్నాడు కనుక, పడుచువాడు అతడిని, అంటే 10 నిమిషాలలో కలుసుకుంటాడు. రెండవ పద్ధతి : ఇది ఇంకా సులభం. మిల్లు చేరుకోడానికి పడుచువాడికన్న ముసలివాడికి పది నిమిషాలు ఎక్కువ పడుతుంది. కనుక, ముసలివాడు 10 నిమిషాలు ముందుగా బయలుదేరితే ఇద్దరూ మిల్లు దగ్గరకు ఏక సమయంలో చేరుకుంటారు. 5 నిమిషాలు మాత్రమే ముందుగా బయలుదేరితే సగం దూరంలో కలుసుకుంటారు. పడుచువాడికి మొత్తం దూరం నడపడానికి 20 నిమిషాలు పడుతుంది. సగం దూరానికి 10 నిమిషాలు కనుక, పడుచువాడు ముసలివాడిని 10 నిమిషాల తరువాత కలుసుకుంటారు.

ఈ లెక్కని ఇంకా అనేక రకాలుగా చేయవచ్చు.

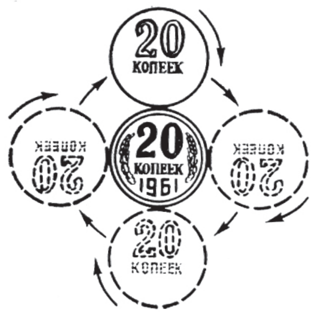
32. ఈ సమస్యని సాధించడానికి ఒక కొత్త పద్ధతిని ఇక్కడ చూపిస్తున్నాను. ఏక సమయంలో పని పూర్తి చేయడానికి టైపిస్టులు ఇద్దరూ మొత్తం పనిని ఏ విధంగా పంచుకోవాలో చూద్దాం. (వాళ్ళిద్దరూ అనవసర కాలహరణం చేయకుండా పని చేశారని అనుకుంటే, ఇది ఒక్కటే సాధ్యమైనంత త్వరగా పని పూర్తి అవడానికి సరి అయిన పద్ధతి అనేది విదితమే కదా?). జూనియరు కన్న సీనియరు 1.5 రెట్ల వేగంతో టైపు చేయగలదు కనుక, ఆమె వంతు పని జూనియరు కన్న 1.5 రెట్లు అధికంగా ఉండాలి. అప్పుడు ఇద్దరూ ఏక సమయంలో పని పూర్తి చేయగలుగుతారు. కనుక సీనియరు 2/5వ వంతు పనిని తీసుకోవాలి.

ఎంత వ్యవధిలో సీనియరు తన వంతు పనిని (అంటే 3/5 వ వంతు) పూర్తి చేయగలుగుతుందో నిర్ణయించాలి. ఆ మొత్తం పనిని 2 గంటలలో పూర్తి చేయగలదని తెలుసు కనుక, $\frac{3}{5}$ వ వంతు పనిని $2 \times \frac{3}{5} = 1\frac{1}{5}$ గంటల కాలంలో పూర్తి చేస్తుంది. రెండవ టైపిస్టు కూడా తన వంతు పనిని ఇదే వ్యవధిలో పూర్తి చేయగలుగుతుంది. కనుక, ఇద్దరూ కలిసి ఆ పనిని పూర్తి చేయడానికి పట్టే కనిష్ట కాలం 1 గంట 12 నిమిషాలు.

దీనినే మరో విధంగా కూడా సాధించవచ్చు. 6 గంటల కాలంలో సీనియరు ఆ రిపోర్టును 3 సార్లు, జూనియర్ 2 సార్లు పూర్తి చేయగలుగుతారు. అంటే, 6 గంటలలో ఆ ఇద్దరూ కలిసి ఆ రిపోర్టుని 5 రెట్ల కాగితాలుగా టైపు చేయగలుగుతారు. కనుక ఒక్క రిపోర్టు పూర్తి చేయడానికి 6/5 గంటలు, అంటే 1 గంట 12 నిమిషాలు పడుతుంది.

33. చిన్న చక్రం 3 సార్లు తిరుగుతుంది అని మీ సమాధానం అయితే పప్పులో అడుగు వేశారన్నమాటే. నిజానికి 4 సార్లు తిరుగుతుంది!

ఇది నిజమో కాదో సరి చూడటానికి బల్ల మీద ఒకే రకం నాణెములు రెండు పెట్టు. 20వ బొమ్మలో లాగ (ఉదాహరణకి, 20 కోసెక్కులు లేక 20 పైసల బిళ్ళలు 2 పెట్టవచ్చు). అందులో ఒక బిళ్ళని కదలకుండా వేలితో నొక్కి పెట్టి ఉంచి, అంచుల వెంబడే (స్లిప్ అవకుండా) దొర్లించుకుంటూ వెళ్ళు. పైన ఉన్న రెండవ బిళ్ళ సగం దూరం తిరిగి కిందికి వచ్చేసరికి తన చుట్టూ తాను ఒక పూర్తి చుట్టు తిరిగినట్లు గమనించి, మీరు ఆశ్చర్యపోతారు. బొమ్మలో చూపిన 20 కోసెక్కుల బిళ్ళ మీది అక్షరాలను చూస్తే ఈ విషయం విశదమవుతుంది. మధ్యలో నొక్కి ఉంచిన బిళ్ళ చుట్టూ ఒక ప్రదక్షిణం పూర్తి అయ్యేసరికి రెండవ బిళ్ళ రెండు ఆత్మ ప్రదక్షిణాలు పూర్తి చేస్తుంది.



20వ బొమ్మ : స్థిరంగా ఉన్న నాణెం చుట్టూ, రెండవ నాణెం ఒక్క చుట్టు కాదు, రెండు చుట్లు తిరుగుతుంది.

ఏదైనా వస్తువు వృత్తాకార కక్ష్యతో తిరిగినప్పుడు మామూలుగా మనం లెక్కించిన దాని కన్న ఒక చుట్టు అధికంగా తిరుగుతుంది. సూర్యుడి చుట్టూ ఒక ప్రదక్షిణం పూర్తి చేసి భూమి బయలుదేరిన చోటికే రావడానికి పట్టే వ్యవధిలో భూమి తన చుట్టూ తాను

$365\frac{1}{4}$ కాదు, $366\frac{1}{4}$ భ్రమణాలు పూర్తి చేస్తుంది. (భూమి యొక్క ఆత్మ ప్రదక్షిణాలు సూర్యుడి యొక్క స్థితితో పోల్చకుండా స్థిరంగా వున్న నక్షత్రాల స్థితితో పోల్చితేనే). కనుకనే సౌరదినం (solar day) కన్న నక్షత్ర దినం (sidareal day) పొట్టిగా ఉంటుంది.

34. అంకగణితం ఉపయోగించి ఈ లెక్కని సాధించడం చాలా కష్టం. బీజగణితం ద్వారా అయితే బహు సులభంగా సాధించవచ్చు. అతడి వయస్సు x అనుకుందాం. మూడేళ్ళ తరువాత (x + 3) అవుతుంది. మూడేళ్ళ క్రితం (x - 3) అవుతుంది కనుక :

$$3(x+3) - 3(x-3) = x$$

ఈ సమీకరణాన్ని సాధిస్తే x = 18 వస్తుంది. అతడి వయస్సు 18 సంవత్సరాలన్నమాట. సరిగ్గా ఉందో లేదో చూద్దాం : మూడేళ్ళ తరువాత అతడి వయస్సు 21 ఏళ్ళు. మూడేళ్ళ క్రితం 15 ఏళ్ళు.

$$(3 \times 21) - (3 \times 15) = 63 - 45 = 18$$

35. కిందటి సమస్యలాగే దీనిని బీజగణితం ద్వారా సులభంగా సాధించవచ్చు. కొడుకు వయస్సు x అయితే, తండ్రి వయస్సు 2x. 18 ఏళ్ళ క్రితం తండ్రి వయస్సు (2x - 18) ఏళ్ళు, కొడుకు వయస్సు (x - 18) ఏళ్ళు. అప్పుడు కొడుకు వయస్సు కన్నా తండ్రి వయస్సు 3 రెట్లు అధికం అని మనకు తెలుసు కనుక,

$$3(x - 18) = 2x - 18.$$

ఈ సమీకరణాన్ని సాధిస్తే x = 36 వస్తుంది. కనుక కొడుకు వయస్సు 36 ఏళ్ళు. తండ్రి వయస్సు 72 ఏళ్ళు.

36. మొదటి సీసాలో x గ్రాముల ఏసిడ్, రెండవ సీసాలో x గ్రాముల నీళ్ళు ఉన్నాయనుకుందాం. మొట్టమొదట : మొదటి మార్పు తరువాత మొదటి సీసాలో (x - 20) గ్రాముల ఏసిడ్, రెండవ సీసాలో (x + 20) గ్రాముల నీరూ, ఏసిడ్ కలిపిన ద్రవమిశ్రమమూ ఉంటాయి.

రెండవ మార్పు తరువాత రెండవ సీసాలో $1/3\,(x + 20)$ గ్రాముల ద్రవమూ, మొదటి సీసాలో $(x - 20) + \frac{2}{3}\ (x + 20) = \frac{5x-20}{3}$ గ్రాముల ద్రవమూ ఉంటాయి.

రెండవ మార్పు తరువాత రెండవ సీసాలో కన్నా మొదటి సీసాలో 4 రెట్లు అధికంగా ద్రవం ఉందని మనకు తెలుసు కనుక.

$$\frac{4}{3}(x + 20) = \frac{5x - 20}{3}$$

కనుక $x = 100$ గ్రాములు.

ఒక్కొక్క సీసాలో 100 గ్రాముల ఏసిడ్, నీరూ ఉండేవి మొదట.

37. మొట్టమొదట నా దగ్గర x రూబులు నోట్లూ, y 20 కోపెక్కుల బిళ్ళలూ ఉండేవి అనుకుందాం. అంటే, బజారుకి వెళ్ళే ముందు నా దగ్గర $(100x + 20y)$ కోపెక్కులు ఉండేవి అన్నమాట. తిరిగి వచ్చాక నా దగ్గర $(100y + 20x)$ కోపెక్కులు మిగిలాయి.

చివర నా దగ్గర మిగిలిన సొమ్ము మొదట తీసుకువెళ్ళిన సొమ్ములో 3వ వంతు అని మనకు తెలుసు కనుక,

$$3\,(100y + 20x) = 100x + 20y$$

దీనిని సూక్ష్మీకరిస్తే $x = 7y$ వస్తుంది.

ఇప్పుడు x , y ల విలువలు ఊహించాలి. $y=1$ అనుకుంటే, $x=7$ అవుతుంది. అంటే, మొదట నా దగ్గర 7 రూబుళ్ళ 20 కోపెక్కులు వుండేవని అర్థం. కాని ఇది తప్పు. ఏమంటే, మొదట నా దగ్గర సుమారు 15 రూబుళ్ళు ఉండేవని కదా చెప్పాను?

పోనీ $y=2$ అనుకుంటే, $x=14$ అవుతుంది. అంటే, మొదట నా దగ్గర 14 రూబుళ్ళ 40 కోపెక్కులు ఉండేవన్నమాట. ఇది సరిపోతుంది. పోనీ $y=3$ అనుకుంటే, $x=21$ అవుతుంది. అప్పుడు 21 రూబుళ్ళ 60 కోపెక్కులు అవుతుంది కనుక, ఇది కూడా తప్పే.

దీనిని బట్టి సరి అయిన జవాబు 14 రూబుళ్ళ 40 కోపెక్కులు. దుకాణాలు చుట్టబెట్టాక 2 రూబులు నోట్లూ, 14 ఇరవై కోపెక్కుల బిళ్ళలూ మిగిలాయి. అంటే, మొత్తం 200+280=480 కోపెక్కులు. ఇది మొదట నా దగ్గర ఉన్న సొమ్ములో సరిగ్గా 3వ వంతు (1440÷3 = 480) కనుక నేను ఖర్చు పెట్టినది 1440–980=960. కోపెక్కులు అంటే 9 రూబుళ్ళ 60 కోపెక్కులు.

4వ ప్రకరణం

లెక్కపెట్టడం

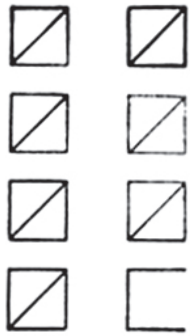
38. లెక్కపెట్టడం ఎలాగో నీకు తెలుసా?

"మూడేళ్ళు దాటిన పిల్లలనెవరైనా సరే "లెక్కపెట్టడం వచ్చునా?" అని అడిగితే అవమానించినట్లు భావిస్తారు. ఏమంటే ఒకటి, రెండు, మూడు.... అంటూ లెక్కపెట్టడం ఏమీ కష్టం కాదు కనుక, అయినా ఆ లెక్క పెట్టడమే ఒక్కొక్కసారి చాలా క్లిష్ట సమస్యగా పరిణమిస్తూ ఉంటుంది. ఉదాహరణకి, డబ్బాలో వున్న మేకులు లెక్కపెట్టడమంటే కష్టం ఏమీ లేదు. కాని, అదే డబ్బాలో మేకులే కాక, స్క్రూలు కూడా పోసి, వాటిని వేరు వేరుగా లెక్కపెట్టి ఎన్ని ఉన్నాయో చెప్పమన్నారనుకుందాం. అప్పుడేం చేస్తావు? మేకులూ, స్క్రూలూ వేరు చేసి, వేరు వేరుగా లెక్కపెడతావు కదూ?

చాకలి పద్దు వెయ్యడంలో ఆడవాళ్ళకి ఈ సమస్యే ఎదురవుతూ ఉంటుంది. చొక్కాలు, తువ్వాళ్ళు, గలీబులు అంటూ విడదీస్తారు ముందు. విసుగెత్తించే ఆ పని అయ్యాక, తరువాత లెక్కపెడతారు వేరు వేరుగా.

నువ్వు కూడా అలాగే చేసేటట్లయితే, నీకు లెక్కపెట్టడం రాదన్నమాట. ఇది చాలా చుట్టు పద్ధతి, పైగా ఒక్కొక్కప్పుడు అసాధ్యమైన పని కూడాను. లెక్కపెట్టవలసిన వస్తువులు మేకులూ, బట్టలూ వంటివి అయితే మరే అంత ఇబ్బంది లేదు. వాటిని సులభంగానే లెక్కపెట్టుకోవచ్చు. నువ్వు ఫారెస్టు ఆఫీసరువి అనుకో. అడవిలో హెక్టారుకి ఎన్ని మద్దిచెట్లు, ఎన్ని వేపచెట్లు, ఎన్ని తుమ్మచెట్లు, ఎన్ని సరుగుడు చెట్లు ఉన్నాయో లెక్కపెట్టమని అడిగారనుకో. ఇక్కడ చెట్లని రకాల వారీగా విడదీసి, ఒక చోట పోసి, తరువాత వేరు వేరుగా లెక్కపెట్టడం సాధ్యమా? అయితే మరి ఏం చేస్తావు? ముందు మద్దిచెట్లు అన్ని లెక్కపెట్టి, తరువాత వేపచెట్లు లెక్కపెట్టి, తరువాత తుమ్మచెట్లు, ఆ తరువాత సరుగుడు చెట్లు లెక్కపెడతావా, వేరు వేరుగా? అలా అయితే అడవి అంతా నాలుగు సార్లు తిరిగి రావాలి.

21వ బొమ్మ : ఐదేసి గీతల చొప్పున వేసుకోవాలి



22వ బొమ్మ : చదరాల సాయంతో లెక్కపెట్టే పద్ధతి

23వ బొమ్మ : ఒక్కొక్క చదరం పదేసి వస్తువులకు గుర్తు

ఇందులో ఒక సులభ పద్ధతి ఉంది. ఒక్క ఊపులో మేకులూ, స్క్రూలూ లెక్కపెట్టే పద్ధతి చూపిస్తాను.

డబ్బాలో కలగాపులగంగా పడి వున్న మేకులనూ, స్క్రూలనూ వేరు చెయ్యకుండా లెక్కపెట్టడానికి ఒక కాగితం, పెన్సిలూ తీసుకో. కాగితం మీద మేకులు, స్క్రూలు అని రెండు నిలువు వరుసలు గియ్యి.

తరువాత లెక్కించడం మొదలు పెట్టు. డబ్బాలో చెయ్యి పెట్టి, ఏదో ఒక వస్తువును బయటికి తియ్యి. అది మేకు అయితే మేకుల వరుసలో ఒక చిన్న గీత గియ్యి. ఈ విధంగా డబ్బాలో ఉన్న వస్తువులన్నీ అయిపోయే దాకా చెయ్యి. ఏ వరుసకి ఆ వరుస వేరుగా ఎన్నేసి గీతలున్నాయో లెక్కపెట్టుకుంటే మేకుల సంఖ్య, స్క్రూల సంఖ్య తెలుస్తుంది.

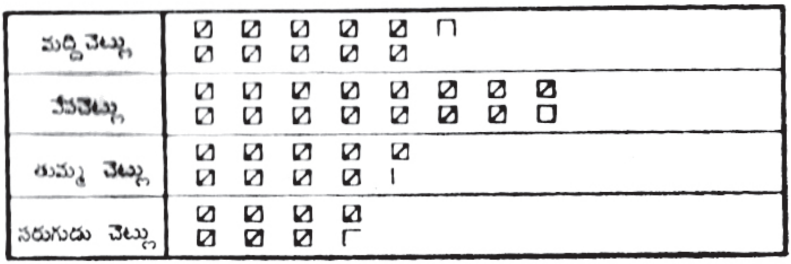
గీతలను కూడటంలో కొన్ని సులభమైన పద్ధతులున్నాయి. నాలుగు గీతలను కర్ణంతో చిన్న చదరాలుగా గీస్తే ఐదేసి గీతల చొప్పున వేగంగా లెక్కపెట్టవచ్చు. (21వ బొమ్మ).

ఇటువంటి చదరాలను ఒక అడ్డ వరుసకి రెండేసి చొప్పున రాస్తే, పదేసి గీతలను తొందరగా లెక్కపెట్టవచ్చు. 22వ బొమ్మలో పదేసి గీతల వరుసలు మూడు, ఒక ఐదు గీతల చదరం, ఒక మూడు గీతల అసంపూర్ణ చదరం ఉన్నాయి. కనుక,

మద్ది చెట్లు	
వేపచెట్లు	
తుమ్మ చెట్లు	
సరుగుడు చెట్లు	

30+5+3 = 38 గీతలు.

24వ బొమ్మ : చెట్లు లెక్కపెట్టడానికి చార్టు



25వ బొమ్మ : నింపిన చార్టు ఈ విధంగా ఉంటుంది.

వేగంగా లెక్కించడానికి వేరే రకాల బొమ్మలను కూడా ఉపయోగించవచ్చు. 23వ బొమ్మలో ఒక్కొక్క చదరం పదేసి గీతలకి సమానం.

అడవిలోని రకరకాల చెట్లని లెక్కపెట్టడానికి ఇదే పద్ధతిని ఉపయోగించవచ్చు. అన్నట్లు, నిలువు వరుసల కన్న అడ్డ వరుసలు ఎక్కువ వీలుగా ఉంటాయి. 24వ బొమ్మలో ఒక ఉదాహరణ. ఈ రకమైన చార్టును నింపినప్పుడు ఎలా ఉంటుందో 25వ బొమ్మలో చూపబడింది. ఆ తరువాత వాటిని కూడటం చాలా సులభం.

మద్దిచెట్లు...............	83
వేపచెట్లు	70
తుమ్మచెట్లు	46

సరుగుడు చెట్లు 37

ఈ పద్ధతిలో చాకలి పద్దు వేస్తే, ఆడవాళ్ళకి చాలా టైము ఆదా అవుతుంది.

తోటలో రకరకాల మొక్కలు ఏ రకానికి ఎన్ని ఉన్నాయో లెక్కపెట్టే పద్ధతి తెలిసింది కదా? ఒక్కొక్క రకం యొక్క మొక్కకి ఒక్కొక్క వరుస చొప్పున గీస్తూ చార్టు తయారు చెయ్యాలి.

ఊహించని కొత్త రకం మొక్కలు ఏవైనా అగదగిలితే వాటి కోసమని మరికొన్ని వరుసలు ఖాళీగా వదిలెయ్యాలి. 26వ బొమ్మలో ఉదాహరణకి, ఒక చార్టు చూపించాను.

చేమంతులు	
చంద్రకాంతులు	
మల్లెలు	
గంధపు గిన్నెలు	
కనకాంబరాలు	

26వ బొమ్మ : మొక్కలను లెక్కపెట్టే పద్ధతి

అడవిలో చెట్లు లెక్కపెట్టిన పద్ధతిలోనే తోటలోని మొక్కలను కూడా లెక్కపెట్టవచ్చు.

39. అడవిలోని చెట్లను లెక్కపెట్టడం ఎందుకు?

అవును, ఎందుకూ? పట్టణాలలో వుండే వారికి అరణ్యవృక్ష గణనం అసాధ్యం అనిపిస్తుంది. లెవ్ తొల్‌స్తాయ్ రాసిన 'అన్నకరెనిన' అనే గ్రంథంలో లెనిన్ అనే రైతు, తన అడవిని అమ్మజూపుతున్న ఒబ్లొన్‌స్కి అనే పెద్ద మనిషిని అడుగుతాడు, "మీ అడవిలో ఉన్న చెట్లని లెక్కపెట్టారా?" అని.

"ఏమిటీ? చెట్లని లెక్కపెట్టడమా?" అని ఒబ్లొన్‌స్కి నివ్వెరపోయాడు. "సముద్రపు ఒడ్డున ఇసుక రేణువులను లెక్కపెట్టగలమా? సూర్యుడి తాలూకు కిరణాలను

లెక్కపెట్టగలమా? ఎంత గొప్ప మేధావంతులలో మేధావి అయినప్పటికీ....”

“ర్యబినిన్ గారి అసాధారణ మేధస్సు ఆ పనిని విజయవంతంగా చేయగలిగింది అని మాత్రం నాకు తెలుసు. లెక్కపెట్టుకోకుండా వ్యాపారస్తుడు అన్నవాడెవడూ ఎప్పుడూ ఏమీ కొనడు” అన్నాడు లెనిన్.

ఎన్ని ఘనపు మీటర్ల కలప ఉన్నదో తెలుసుకోవడం కోసం అడవిలోని చెట్లను లెక్కపెడతాడు. అందుకోసం మొత్తం అడవిలోని అన్ని చెట్లనూ లెక్కపెట్టరు. అడవిలో అర హెక్టారో, పావు హెక్టారో స్థలం తీసుకుని లెక్కపెడతారు. ఆ తీసుకున్న స్థలంలో చెట్లు సగటు దట్టంగా, సగటు పరిమాణంలో ఉండేటట్లు ఎన్నుకుంటారు. ఈ పని చేయగలగడానికి మంచి అనుభవం కావాలి. ఈ పనికి ఒక్కొక్క జాతికి ఎన్నేసి చెట్లు ఉన్నాయో తెలిస్తే చాలదు. ఆ చెట్ల మొదళ్ళు ఎంత లావుగా ఉన్నాయో కూడా తెలియాలి. ఉదాహరణకి 25 సెం.మీ. వ్యాసం గలవి ఎన్ని? 30 సెం.మీ. వ్యాసం గలవి ఎన్ని? 35 సెం.మీ. వ్యాసం గలవి ఎన్ని?.... వగైరా వగైరా సమాచారం తెలుసుకోవాలి. మనం తయారుచేసిన అతి సామాన్యమైన నాలుగు వరుసల చార్టులో కన్నా ఇంకా అత్యధికంగా వరుసలు ఉంటాయి. ఈ భోగట్టా అంతా సేకరించడానికి ఇక్కడ మనం చెప్పుకున్న పద్ధతిలో కాకుండా, చాకలి పద్దు చేసే పద్ధతిలో ప్రయత్నిస్తే ఎన్నెన్నిసార్లు అడవి అంతా తిరిగి రావాలో మీకీపాటికి అర్థం అయ్యే వుంటుంది.

ఒకే రకం వస్తువులను లెక్కపెట్టడం చాలా సులభం. లెక్కపెట్టవలసిన వస్తువులలో వైవిధ్యం ఎక్కువైతే ఇప్పుడు మనం చెప్పుకున్న పద్ధతిని అనుసరించాలి. చాలామందికి ఇటువంటి పద్ధతులు ఉన్నాయనే తెలియదు.

5వ ప్రకరణం

ఆశ్చర్యకరమైన అంకెలు

40. ఐదు రూబుళ్ళకు వంద రూబుళ్ళు

ఒక గారడీవాడు చూడవచ్చిన ప్రేక్షకులతో ఒక చిన్న బేరం పెట్టాడు.

"మీరు నాకు 5 రూబుళ్ళకు చిల్లర ఇస్తే నేను మీకు 100 రూబుళ్ళు ఇస్తాను. ఆగండాగండి! అయితే, అందులో 60 కోపెక్కుల బిళ్ళలు, 20 కోపెక్కుల బిళ్ళలు, 5 కోపెక్కుల బిళ్ళలు మొత్తం 20 బిళ్ళలు ఉండాలి. వీటి మొత్తం విలువ 5 రూబుళ్ళు అయి వుండాలి. ఈ విధంగా 5 రూబుళ్ళకు చిల్లర ఇచ్చి 100 రూబుళ్ళు తీసుకువెళ్ళగల వారెవరైనా ఉన్నారా?" అన్నాడు గారడీవాడు.

ప్రేక్షకులతో క్రిక్కిరిసిన ఆడిటోరియం అంతా నిశ్శబ్దం అయిపోయింది. కొందరు కాగితం, పెన్సిలు తీసుకుని లెక్కలు కట్టడం మొదలుపెట్టారు. గారడీవాడి మాటలు నమ్మవచ్చునా లేదా అనే అనుమానంలో పడ్డారు అందరూ.

"ఓహో! అదా సంగతీ! 100 రూబుళ్ళకి 5 రూబుళ్ళు ఇవ్వడం మంచి బేరంలా మీకు తోచడం లేదు కాబోలు. సరే, అదే పద్ధతిలో 3 రూబుళ్ళకి చిల్లర ఇవ్వండి చాలు, 100 రూబుళ్ళు ఇచ్చేస్తాను. ఊ, లేవరేం ఇంకా? కాని ఎవ్వరూ లేవలేదు. ఇంత సులభంగా డబ్బు నొదులుకోవడానికి ఎవ్వరూ సిద్ధంగా ఉన్నట్టు లేరు.

"అరే! 3 రూబుళ్ళు కూడా ఎక్కువేనంటారా? ఆల్‌రైట్! మరో రూబులు తగ్గించుకోండి. అదే పద్ధతిలో 2 రూబుళ్ళకి ఇవ్వండి చాలు. ఇప్పుడేమంటారు?"

అయినా సరే, తీసుకునే వాళ్ళెవరూ లేకపోయారు. గారడీవాడు ఇంకా ఊరుకోలేదు. "ఓహో! మీ దగ్గర చిల్లర లేదా? పోనీ, కాగితం మీద రాసి చూపించండి ఏ రకం నాణెములు ఎన్నెన్ని ఇవ్వదలచుకున్నారో."

41. సహస్రం

ఒకే అంకెని ఎనిమిదిసార్లు ఉపయోగించి వెయ్యి అయేటట్లు రాయగలరా? అన్నట్లు అంకెలతో పాటు గణిత సంజ్ఞలు కూడా వాడుకోవచ్చు.

42. ఇరవై నాలుగు

3 ఎనిమిదులు ఉపయోగించి 24 రాయడం చాలా సులభం!

$$8 + 8 + 8 = 24$$

మరో అంకె ఏదైనా 3 సార్లు ఉపయోగించి 24 వచ్చేలా రాయగలరా?

43. ముప్పై

3 ఐదులు ఉపయోగించి 30 వచ్చేటట్లు రాయడం కష్టం ఏమీ కాదు.

$$5 \times 5 + 5 = 30$$

5 కాక మరో అంకెను దేనినైనా 3 సార్లు ఉపయోగించి 30 రాయగలరా?

44. మాయమైన అంకెలు

ఈ కింద చూపించిన గుణకారంలో సగం పైగా అంకెలు మాయమై, వాటి స్థానాలలో నక్షత్రం (*) గుర్తు మాత్రం కనిపిస్తుంది.

		*	1	*
		3	*	2
		------	------	------
		*	3	2
3	*	2	*	
*	2	*	5	
------	------	------	------	
1	*	8	*	30

మాయమైన అంకెలను వెతికి పట్టుకు రాగలవా?

45. మాయమైన మరికొన్ని అంకెలు

```
            *    *    5
            1    *    *
            -------------
       2    *    *    5
  1    3    *    0
  *    *    *
  --------------------
  4    *    77   *
```

అటువంటిదే మరో సమస్య. ఈ గుణకారంలోని అదృశ్య సంఖ్యలను తెలుసుకోవాలి.

46. అదృశ్య సంఖ్యల భాగహారం

ఈ భాగహారంలోని అదృశ్య సంఖ్యలను తెలుసుకోవాలి.

```
325)   *    2    *    5    * (**
       *    *    *
       ------------------------
       *    0    *    *
       *    9    *    *
       ------------------------
            *    5    *
            *    5    *
       ------------------------
```

47. 11తో భాగహారం

11తోటి నిశ్శేషంగా భాగించబడి తొమ్మిది పునరుక్తం కాని (Non repetitive) అంకెల చేత ఏర్పడ్డ సంఖ్యని రాయగలవా? అటువంటి సంఖ్యలలో అన్నింటి కన్న పెద్దదీ, అన్నింటి కన్న చిన్నదీ ఏది?

48. విచిత్రమైన గుణకారం

ఈ కింద చూపించిన గుణకారాన్ని జాగ్రత్తగా గమనించు.

$$48 \times 159 = 7632$$

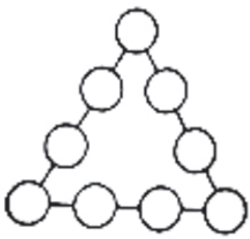
దీని ప్రత్యేకత ఏమిటంటే, ఇందులో ఉన్న తొమ్మిదీ వేరు వేరు అంకెలే. ఇటువంటి ఉదాహరణలు ఇంకా ఇవ్వగలవా? అసలు అంటూ ఉంటే అటువంటివి ఎన్ని ఉన్నాయి?

49. అంకెల గుణకారం

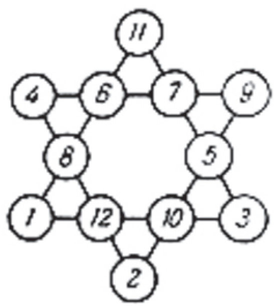
27వ బొమ్మలో ఒక త్రిభుజం ఉంది. అందులో తొమ్మిది సున్నాలున్నాయి. ఈ ఖాళీ స్థలాలలో ఎటు కూడినా మొత్తం 20 వచ్చేటట్లుగా తొమ్మిది పునరుక్తం కాని సంఖ్యలు రాయగలవా?

50 మరో అంకెల త్రిభుజం

పై త్రిభుజంలోని ఖాళీ స్థానాలలోనే తొమ్మిది పునరుక్తం కాని సంఖ్యలు – ఎటు కూడినా మొత్తం 17 వచ్చేటట్లు రాయగలవా?



27వ బొమ్మ :
సున్నాలతో అంకెలు వెయ్యాలి



28వ బొమ్మ :
మాజిక్కు నక్షత్రం

51. మాజిక్కు నక్షత్రం

28వ బొమ్మలో చూపించిన ఆరు కోణాల నక్షత్రం నిజానికి మాజిక్కు నక్షత్రం. అంటే ఎటు కూడినా ఒకే మొత్తం వస్తుంది అని అర్థం :

$$4 + 6 + 7 + 9 = 26$$

$$4 + 8 + 12 + 2 = 26$$

$$9 + 5 + 10 + 2 = 26$$

$$11 + 6 + 8 + 1 = 26$$

$$11 + 7 + 5 + 3 = 26$$

$$1 + 12 + 10 + 3 = 26$$

కాని, కోణాలు ఆరింటి చివరల ఉన్న అంకెల మొత్తం = 26 కాదు.

$$4 + 11 + 9 + 3 + 2 + 1 = 30$$

ఈ నక్షత్రంలోని 12 అంకెలనూ తగిన విధంగా మార్చి, ఎటు కూడినా మొత్తం 26 మాత్రమే కాక, కోణాల మొత్తం కూడా 26 ఉండేటట్లు చేయగలవా?

40 నుంచి 51 వరకూ జవాబులు

40. ఇందులోని 3 సమస్యలూ అసాధ్యములే. గారడీవాడు ఎంత పెద్ద మొత్తాన్ని అయినా సరే ఇస్తానని హామీ ఇవ్వవచ్చు. అతడికి వచ్చే నష్టం ఏమీ లేదు. ఈ విషయాన్ని రుజువు చెయ్యడానికి బీజ గణితాన్ని ఉపయోగించి పరిశీలిద్దాం.

5 రూబుళ్ళు ఇవ్వడం ! మాట వరసకి ఇది సాధ్యమేననుకుందాం. అందుకోసం x 50 కోపెక్కుల, y 20– కోపెక్కుల, z 5– కోపెక్కుల బిళ్ళలు కావాలి అనుకుందాం. అప్పుడు ఈ కింది సమీకరణాన్ని రాయవచ్చు :

$50x + 20y + 5z = 500$ కోపెక్కులు

దీన్ని 5 చే భాగిస్తే :

$10x + 4y + z = 100$

ఇంతేకాకుండా నాణెముల మొత్తం 20 అయి వుండాలి కనుక,

$x + y + z = 20$

మొదటి సమీకరణంలో నుంచి రెండవ సమీకరణాన్ని తీసివేస్తే :

$$9x + 3y = 80$$

దీనిని 3 చే భాగిస్తే :

$$3x + y = 26\frac{2}{3}$$

కాని 3x అనేది ఏమిటి? అర్ధ రూబులు బిళ్ళల సంఖ్యకు 3 రెట్లు. కనుక, ఇది పూర్ణాంకమే (integer). అలాగే 20 కోపెక్కుల బిళ్ళల సంఖ్యను సూచించే y కూడా. కనుక, ఈ రెండు పూర్ణాంకముల మొత్తమూ భిన్నాంకం ఎలా అవుతుందీ? కనుక, ఇది అసాధ్యమైన సమస్య.

అలాగే 3 రూబుళ్ళ సమస్య కూడానూ. పైన చెప్పినట్లే సమీకరణాలు రాస్తే :

$$3x + y = 13\frac{1}{3}$$

అలాగే 2 రూ. సమస్యలో

$$3x + y = 6\frac{2}{3}$$

ఇవి రెండూ భిన్నాంకములే కనుక ఈ రెండూ కూడా అసాధ్యములే.

కాబట్టి, ఎంత పెద్ద మొత్తం ఇస్తానని ప్రకటించినా గారడీవాడికి నష్టం కించిత్తూ లేదు. అతడు ఇచ్చుకోవలసిన పరిస్థితి ఏర్పడదు.

అన్నట్లు 4 రూబుళ్ళకు చిల్లర ఇవ్వమని అడిగినట్లయితే సమస్య సాధ్యమే. దానికి 7 రకాల సొల్యూషనులున్నాయి. ఉదాహరణకి, 6 అర్ధ రూబులు బిళ్ళలు, రెండు 20 కోపెక్కులు, పన్నెండు 5 కోపెక్కులు కలిపితే 20 నాణెముల మొత్తం విలువ 4 రూబుళ్ళు అవుతుంది.

41. $888 + 88 + 8 + 8 + 8 = 1000$

ఇది కాక ఇంకా చాలా సొల్యూషనులున్నాయి.

42. రెండు రకాల సొల్యూషనులు ఈ దిగువన ఇచ్చాను :

$22 + 2 = 24$

$3^3 - 3 = 24$

43. మూడు సొల్యూషన్‌లు ఇక్కడ ఇచ్చాను.

$6 \times 6 - 6 = 30$;

$3^3 + 3 = 30$;

$33 - 3 = 30$

44. ఈ క్రింది పద్ధతి అవలంబిస్తే అదృశ్య సంఖ్యలు క్రమంగా బయటపడతాయి. సౌలభ్యం కోసం గుణకారంలోని వివిధ పంక్తులను రోమను సంఖ్యలతో సూచిద్దాం :

ః	*	1	*	I	
	3	*	2	II	
	*	3	*	III	
3	*	2	*	IV	
*	2	*	5	V	
1	*	8	30	VI	

IIIవ లైన్‌లోని చివరి అంకె 0 అని తెలుస్తోంది. ఏమంటే, VIవ లైన్ చివరి అంకె 0 కదా? తరువాత 1వ లైనులోని చివరి * యొక్క విలువలను నిర్ణయిద్దాం. 2 చేత గుణిస్తే చివర వచ్చే అంకె, ఇది పైగా 3 చేత గుణిస్తే చివర 5 వచ్చే అంకె కూడానూ (ఏమంటే Vవ లైను చివరి అంకె 5 కనుక). అటువంటిది ఒకే ఒక అంకె ఉంది, అది 5.

IVవ లైనులోని చివరి అంకె 0 అని తెలుస్తోంది (IIIవ లైనులోనూ, VIవ లైనులోనూ కుడి నుంచి రెండవ అంకెలను పరిశీలిస్తే ఈ సంగతి విశదమవుతుంది).

ఇప్పుడు IIవ లైనులోని * దేనిని సూచిస్తుందో తెలుసుకోవడం కష్టం. ఏమీ కాదు, అది 8. ఏమంటే, 15 చేత గుణిస్తే చివర 20 వచ్చే అంకె (IV వ లైనులో) ఇది ఒక్కటే.

ఇంతవరకూ వచ్చాక ఇంక మిగిలిన అజ్ఞాతాంకములను సాధించడం చిటికెల మీద పని. గుణించవలసిన I, II సంఖ్యలు ఇప్పుడు పూర్తిగా తెలిసిపోయాయి కనుక, ఇంక వాటిని గుణిస్తే మిగిలినవన్నీ తెలిసిపోతాయి.

చిట్టచివరికి గుణకారం ఈ క్రింద చూపినట్లు ఉంటుంది :

```
    415
    382
   ----
    830
   3320
   1245
-------
 158530
-------
```

45. పైన చూపిన మార్గంలోనే దీనిని కూడా సాధించవచ్చు. జవాబు ఇది :

```
   325
   147
  ----
  2275
  1300
   325
------
 47775
------
```

46. ఈ సమస్యకి జవాబు

325) 52650 (162

325

2015

1950

650

650

---

47. ఈ సమస్యను సాధించడానికి ఏ సంఖ్య అయినా 11 చేత నిశ్శేషంగా భాగించడానికి ఏ సిద్ధాంతం వర్తిస్తుందో తెలుసుకోవడం అవసరం. ఇచ్చిన సంఖ్యలో కుడి వైపు నుంచి మొదలుపెట్టి బేసి అంకెల మొత్తమూ, సరి అంకెల మొత్తమూ కనుక్కొని, వాటి భేదం సున్నాకి సమానం అయినప్పుడు, లేదా ఆ భేదంలో 11 నిశ్శేషంగా పోయినప్పుడు, ఆ సంఖ్యలో 11 సరిగ్గా పోతుందని తెలుసుకోవచ్చు.

ఒక ఉదాహరణ : ఇచ్చిన సంఖ్య 23 658 904 అనుకుందాం.

కుడి నుంచి మొదలుపెట్టి బేసి అంకెల మొత్తం : 4 + 9 + 5 + 3 = 21.

సరి అంకెల మొత్తం : 0 + 8 + 6 + 2 = 16. ఈ రెండింటి భేదం (పెద్ద దానిలో నుంచి చిన్నది తీసి వేయగా) 21–16=5. ఇది 11 చేత నిశ్శేషంగా భాగింపబడదు. కనుక ఇచ్చిన సంఖ్యలో నిశ్శేషంగా పోదు.

మరో సంఖ్య తీసుకుందాం : 7 344 535.

5 + 5 + 4 + 7 = 21

3 + 4 + 3 = 10

21 – 10 = 11

11లో 11 సరిగ్గా పోతుంది కనుక ఇచ్చిన సంఖ్యలో 11 నిశ్శేషంగా పోతుంది.

ఇప్పుడు తొమ్మిది అంకెలనూ ఏ క్రమంలో రాస్తే, 11 నిశ్శేషంగా పోతుందో మనకు తెలుసు.

ఉదాహరణకి, 352 049 786 తీసుకుని అది ఎలాగో చూద్దాం :

$$3 + 2 + 4 + 7 + 6 = 22 ;$$

$$5 + 0 + 9 + 8 = 22 ;$$

$$22 - 22 = 0$$

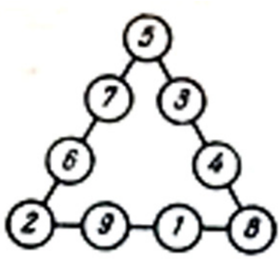
కనుక, పై సంఖ్యలో 11 నిశ్శేషంగా పోతుంది. ఇటువంటి సంఖ్యలలో అన్నిటి కన్నా పెద్దది : 987 652 413. అన్నిటి కన్న చిన్నది : 102 347 586.

48. కాస్త ఓపికపట్టి చూస్తే ఇటువంటివి 9 ఉదాహరణలు దొరుకుతాయి :

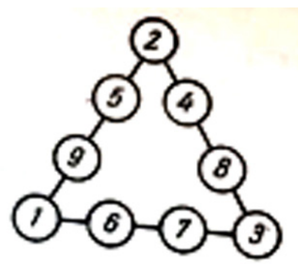
$$12 \times 483 = 5796, \quad 42 \times 138 = 5796,$$
$$18 \times 297 = 5346, \quad 18 \times 297 = 5346,$$
$$27 \times 198 = 5346, \quad 39 \times 186 = 7254,$$
$$48 \times 159 = 7632, \quad 28 \times 157 = 4396,$$
$$4 \times 1738 = 6952, \quad 4 \times 1963 = 7852.$$

49 & 50 : వీటి జవాబులు 29వ బొమ్మలోనూ, 30వ బొమ్మలోనూ ఉన్నాయి. అంకెలను మార్చి ఇతరమైన సొల్యూషనులు రాయవచ్చు.

51. అంకెలను ఎలా మార్చాలో తెలుసుకోవడానికి ఈ క్రింది విధంగా బయలుదేరుదాం.



29వ బొమ్మ



30వ బొమ్మ

కోణముల వద్ద గల అంకెల మొత్తం = 26

నక్షత్రంలోని అంకెల మొత్తం = 87

కనుక లోపలి షడ్భుజిలోని అంకెల మొత్తం = 78–26 = 52

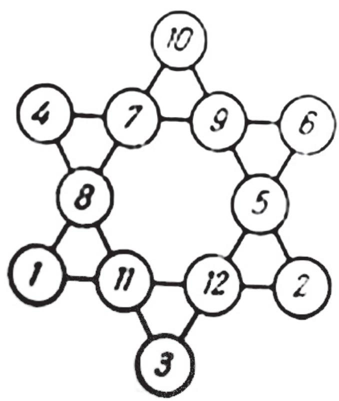
పెద్ద త్రిభుజాలలో ఒకదానిని తీసుకుని పరిశీలిద్దాం. ఇందులోని ప్రతి భుజంలోని అంకెల మొత్తం = 26, కనుక మూడు భుజములూ కలిపితే 26 × 3 = 78 వస్తుంది. కాని కోణముల వద్దనున్న మూడు సంఖ్యలనూ రెండేసి సార్లు లెక్కపెట్టలేం.

లోపలి షడ్భుజి తాలూకు మూడు జంట భుజాల మొత్తం 52 అని మనకు తెలుసు కనుక, ప్రతి పెద్ద భుజం తాలూకు కోణాల సంఖ్యలను రెట్టింపు చేస్తే 78–52 = 26 వస్తుంది. కనుక పెద్ద త్రిభుజపు కోణ సంఖ్యల మొత్తం 13 అని తెలిసింది.

ఇంతవరకూ తెలిశాక మన పని సూక్ష్మం అవుతుంది. ఉదాహరణకి 12 గాని, 11 గాని కోణ సంఖ్యలు అయి ఉండకూడదని తెలుస్తోంది. మచ్చుకి 10 వేసి ప్రయత్నిస్తే మిగిలిన రెండు అంకెలూ 1, 2 అని తేలిపోతుంది.

ఈ విధంగా చేసుకుంటూ పోతే మనకు కావలసిన అమరిక వస్తుంది. అది ఇక్కడ 31వ బొమ్మలో చూపబడింది.

31వ బొమ్మ



6వ ప్రకరణం

రాక్షసి సంఖ్యలు

52. లాభసాటి బేరం

ఇది ఎక్కడ జరిగిందో, ఎప్పుడు జరిగిందో మనకు తెలియదు. అసలు జరిగి ఉండకనూ పోవచ్చు. నిజం అయినా, కాకపోయినా కథ చాలా సరదాగా ఉంటుంది. కనుక విందాం (లేదా చదువుదాం).

1

ఒక కోటీశ్వరుడు మహా సంతోషంగా గాలిలో తేలిపోతూ ఇంటికి తిరిగి వచ్చాడు. అతనికి బజారులో ఒక విచిత్రమైన మనిషి కనిపించి మంచి లాభసాటి బేరం వినిపించాడు.

"ఏమి అదృష్టం!" అని పొంగిపోతూ జరిగినదంతా తన కుటుంబానికి వివరించాడు. ధనవంతులనే అదృష్టం వరిస్తుందంటారు. నా మటుక్కి ఇంత అదృష్టం ఎన్నడూ కనీ వినీ ఎరుగను. అంతా అనుకోకుండా జరిగిపోయింది. ఇంటికి తిరిగి వస్తూ ఉంటే దారిలో ఎవడో వెర్రి పుల్లయ్య కలిశాడు. మామూలుగా అయితే వాడికేసి చూడను కూడా చూడను. నేను డబ్బున్న వాడినని విన్నాను కాబోలు, నా దగ్గరికి వచ్చి ఒక బేరం పెట్టాడు. ఆ బేరం వినేసరికి నాకు మతి పోయిందంటే నమ్మండి.

వాడు అన్నాడు కదా, "ఒక నెల్లాళ్ళపాటు ప్రతి రోజూ నేను మీకు ఒక్కొక్క లక్ష రూబుళ్ళ చొప్పున ఇస్తూ ఉంటాను. నేను వట్టినే ఎందుకిస్తానూ? నాక్కూడా ఏదో లాభం ఉండాలిగా? కొద్దిపాటి లాభం నాకు చాలు" అన్నాడు.

మొదటి రోజున నేను వాడికి చెప్పుకుంటే నవ్వు కూడా వస్తోంది. ఒకే ఒక కోపెక్కు ఇవ్వాలట? నా చెవులను నేనే నమ్మలేకపోయాను.

"ఒక్కటంటే ఒక్క కోపెక్కేనా?" అని మళ్ళీ రెట్టించి అడిగాను.

"ఒక్కటే కోపెక్కు" అని చాలా గట్టిగా, ఖచ్చితంగా చెప్పాడు వాడు.

రెండవ రోజున నేను రెండవ లక్ష పట్టుకువచ్చి ఇచ్చినప్పుడు మీరు నాకు 2 కోపెక్కులు ఇచ్చుకోవాలి."

"ఊ, తరువాతా?" అన్నాను అసహనంగా.

"ఏముందీ? నేను మీకు మూడవ లక్ష తెచ్చి ఇచ్చినప్పుడు మీరు 4 కోపెక్కులు ఇవ్వాలి. నాలుగవ లక్షకి మీరు 8 కోపెక్కులు ఇవ్వాలి. ఐదవ లక్షకి 16 కోపెక్కులు.... ఈ విధంగా రోజు రోజుకీ మీరు అంతకు ముందు ఇచ్చిన దానికి రెట్టింపు ఇస్తూ ఉండాలి."

"తరువాతా? అన్నాను నేను.

"అంతే. ఇంకేమీ లేదు. అంతకన్న ఎక్కువ ఇమ్మని పేచీ పెట్టే రకం కాదు నేను. కానీ, ఒక్క షరతు. అనుకున్నమాట ప్రకారం నెల అంతా పూర్తిగా ఇచ్చుకోవాలి. మధ్యలో మానెయ్యడానికి మాత్రం వీలులేదు" అన్నాడు అతడు.

"మనకి అదెంత లాభమో చూసుకో. కొద్ది కోపెక్కులకి లక్షల కొద్ది రూబుళ్ళు ఇచ్చేస్తానంటున్నాడు. వాడెవడో మోసగాడైనా అయి వుండాలి. లేదా పిచ్చివాడైనా కావాలి. ఎవరైనా కానీ, మనకి నష్టం లేదు. లాభమే అంతానూ. దీనిని వదులుకోవడానికి మనసొప్పడం లేదు."

"సరే, రోజూ లక్షేసి రూబుళ్ళు తెచ్చి ఇస్తూ ఉండు. నువ్వు కోరినట్లుగానే నేనూ ఇస్తూ ఉంటాను. కాని, నన్ను మోసం చెయ్యడానికి మాత్రం ప్రయత్నించకు. దొంగ నోట్లు ఇవ్వకు సుమా!" అని హెచ్చరించాను.

"అటువంటి భయం ఏమీ మీకు అక్కరలేదు. రేపు ఉదయమే మీ ఇంటికి వస్తాను" అన్నాడు వాడు.

"ఇంతా చేసి రాడేమో వాడు. తాను చాలా తెలివితక్కువ బేరం ఆడానని నాలుక తెగకరుచుకుంటాడేమో. చూద్దాం. రేపు అనగా ఎంతలే."

2

మరునాడు తెల్లవారుతూనే కిటికీ మీద ఎవరోకొట్టినట్లు శబ్దం వినిపించింది. ఆ పిచ్చిపుల్లయ్య రానే వచ్చాడు.

"మీరు ఇవ్వాల్సిన కోపెక్కు సిద్ధంగా పెట్టుకున్నారా? నేనివ్వవలసిన డబ్బు తెచ్చాను" అన్నాడు అతడు.

నిజమే! వస్తూనే జేబులోంచి నోట్ల కట్ట తీసి, లక్ష లెక్కపెట్టి ఇచ్చేశాడు పుల్లయ్య.

"ఇదిగో! నేనిస్తానన్న లక్ష. మరి నా పైసా నాకు ఇవ్వండి."

కాస్త ఆలస్యమైతే ఆ పుల్లయ్య తన మనస్సు మార్చుకుని, తన డబ్బు తిరిగి తీసేసుకుంటాడేమోనని భయపడి కోటీశ్వరుడు వెంటనే కోపెక్కును తీసి బల్ల మీద పెట్టాడు. పుల్లయ్య ఆ కోపెక్కును అటూ ఇటూ తిప్పి చూసుకుని, సంతృప్తి పడి జేబులో వేసుకున్నాడు.

"మళ్ళీ రేపు ఉదయం వస్తాను. రెండు కోపెక్కులు రెడీగా ఉంచుకోవడం మర్చిపోకండి" అని వెళ్ళిపోయాడు.

కోటీశ్వరుడు తన అదృష్టాన్ని నమ్మలేకపోయాడు. డబ్బు లెక్కపెట్టుకున్నాడు. అందులో దొంగనోట్లు ఏమీ లేవు కదా అని చూసుకున్నాడు. డబ్బు జాగ్రత్తగా ఇనప్పెట్టెలో పెట్టి తాళం వేసుకున్నాడు. మళ్ళీ ఎప్పుడు తెల్లవారుతుందా అని ఎదురు చూడసాగాడు.

చీకటి పడ్డాక అతడికి భయం పట్టుకుంది. వాడు మారువేషంలో ఉన్న బందిపోటు కాదు కదా? తాను కోటీశ్వరుడనని తెలిసి, డబ్బు దాచిన స్థలం తెలుసుకుని, తరువాత కొల్లగొట్టడానికే ఈ పథకం అంతా ఏమో.

కోటీశ్వరుడు లేచి, తలుపులన్నీ సరిగ్గా వేసి ఉన్నదీ లేనిదీ మరోసారి చూసుకున్నాడు. కిటికీలోంచి మాటిమాటికీ బయటికి చూడసాగాడు. బయట ఏదైనా చప్పుడైతే చాలు ఉలిక్కిపడి లేవడం. మొత్తం మీద రాత్రి చాలాసేపటి దాకా నిద్ర పోలేకపోయాడు.

తెల్లవారుజామునే వీధి తలుపు మీద టకటకా కొట్టిన చప్పుడైంది. పుల్లయ్య మళ్ళీ వచ్చాడు. లక్ష రూబుళ్ళు లెక్కపెట్టి ఇచ్చి, తనకు రావలసిన రెండు కోపెక్కులూ తీసుకుని, జేబులో వేసుకున్నాడు.

"రేపటికి నాలుగు కోపెక్కులు సిద్ధం చేసుకుని ఉంటారుగా?" అంటూ వెళ్ళిపోయాడు.

కోటీశ్వరుడి ఆనందానికి అవధులు లేవు. తన జేబులో మరో లక్ష! ఈసారి పుల్లయ్య బందిపోటులా కనిపించలేదు. అసలు అతడు అనుమానించవలసిన మనిషిలా లేనే లేడు. వాడికి కావలసిందల్లా గుప్పెడు కోపెక్కులు. పిచ్చివాడు! ఇటువంటి వాళ్ళు మరికొంతమంది లోకంలో ఉంటే, తనలాంటి తెలివైనవాళ్ళకి హాయి.

మూడవ రోజున పుల్లయ్య మళ్ళీ టంచనుగా అనుకున్న సమయానికి వచ్చేశాడు. కోటీశ్వరుడికి లక్ష రూబుళ్ళు ఇచ్చేసి, తనకు రావలసిన నాలుగు కోపెక్కులూ పుచ్చుకుని వెళ్ళిపోయాడు.

మరునాడు మరో లక్ష ఇచ్చి, 8 కోపెక్కులు తీసుకున్నాడు.

ఐదవ లక్షకి కోటీశ్వరుడికి 16 కోపెక్కులు ఇచ్చాడు. ఆరవ లక్షకి 32 కోపెక్కులు ఇచ్చాడు.

మొదటి 6 రోజులలోనూ కోటీశ్వరుడికి ఏడు లక్షల రూబుళ్ళు ముట్టాయి. అతడు పుల్లయ్యకిచ్చిన మొత్తం :

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 64 - 1$$ రూబులు 27 కోపెక్కులు.

కోటీశ్వరుడికి ఈ పద్ధతి చాలా నచ్చింది. అతడికి పట్టుకున్న విచారమల్లా ఈ ఒప్పందం ఒక్క నెలకు మాత్రమే పరిమితం కావడం. అంటే, తనకి ముట్టేది కేవలం 30 లక్షల రూబుళ్ళేనన్నమాట. పోని పుల్లయ్యతో మంచి మాటలాడి ఈ ఒప్పందం మరి కొద్ది రోజులు పొడిగిస్తే ఎలా ఉంటుందో? అబ్బే, వద్దు వద్దు. తాను వట్టినే డబ్బు పారేయమంటున్నట్లు ఆ వెర్రివాడికి అనుమానం కలిగించినట్లవుతుంది.

పుల్లయ్య ప్రతి రోజూ వస్తూనే ఉన్నాడు. లక్షేసి రూబుళ్ళ కట్ట ఇస్తూనే ఉన్నాడు.

8వ రోజున 1 రూ. 28 కో.

9వ రోజున 2 రూ. 56 కో.

10వ రోజున 5 రూ. 12 కో.

11వ రోజున 10 రూ. 24 కో.

12వ రోజున 20 రూ. 48 కో.

13వ రోజున 40 రూ. 96 కో.

14వ రోజున 81 రూ. 92 కో. అతడికి ముట్టాయి.

కోటీశ్వరుడు తానివ్వవలసిన మొత్తం వెంట వెంటనే ఇచ్చేస్తున్నాడు. తాను ఇచ్చిన చచ్చు 150 రూబుళ్ళ సొమ్ముకి 14 లక్షల రూబుళ్ళు తిరిగి ముట్టాయి కదా?

కాని, అతడి ఆనందం ఎంతోకాలం నిలవలేదు. ఈ ఒప్పందం మరీ తాను అనుకున్నంత లాభదాయకంగా కనిపించడం లేదు. 15 రోజులు అయ్యాక తానివ్వవలసిన సొమ్ము వందలలో పడింది. కోపెక్కులు కాదు, రూబుళ్ళు! ఇవ్వవలసిన సొమ్ము నానాటికీ హెచ్చిపోతోంది.

15వ లక్ష రూబుళ్ళకి 163 రూ. 84 కో.

16వ లక్ష రూబుళ్ళకి 327 రూ. 68 కో.

17వ లక్ష రూబుళ్ళకి 655 రూ. 36 కో.

18వ లక్ష రూబుళ్ళకి 1310 రూ. 72 కో.

19వ లక్ష రూబుళ్ళకి 2621 రూ. 44 కో. ఇవ్వవలసి వచ్చింది.

ఇంతవరకూ కోటీశ్వరుడికి నష్టం ఏమీ లేదు. అతడు సుమారు 5000 రూబుళ్ళు ఇవ్వడం అయితే ఇచ్చాడు కానీ, 10 లక్షల రూబుళ్ళు తన ఒడిలో వచ్చిపడలేదూ?

కాని, నానాటికీ కోటీశ్వరుడి లాభం తరిగిపోతోంది, అందులోనూ బహు వేగంగా.

కోటీశ్వరుడు చెల్లించిన మొత్తం ఈ విధంగా ఉంది :

20వ లక్షకి 5242 రూబుళ్ళ 88 కోపెక్కులు.

21వ లక్షకి 10485 రూబుళ్ళ 76 కోపెక్కులు.

22వ లక్షకి 20971 రూబుళ్ళ 52 కోపెక్కులు.

23వ లక్షకి 41943 రూబుళ్ళ 04 కోపెక్కులు.

24వ లక్షకి 83886 రూబుళ్ళ 08 కోపెక్కులు.

25వ లక్షకి 167772 రూబుళ్ళ 16 కోపెక్కులు.

26వ లక్షకి 335544 రూబుళ్ళ 32 కోపెక్కులు.

27వ లక్షకి 671088 రూబుళ్ళ 64 కోపెక్కులు.

ఇప్పుడు తన ఖజానాలో పడుతున్న మొత్తం కన్న చాలా ఎక్కువగా కోటీశ్వరుడు ఇచ్చుకోవలసి వస్తోంది. ఇది ఇక్కడితో ఆపేస్తే బాగుండునని అనుకున్నాడు కానీ, ఒప్పందాన్ని ఉల్లంఘించడం అతని తరం కాలేదు.

త్వరలోనే పరిస్థితి మరింత అధ్వాన్నంగ అయిపోయింది. పిచ్చిపుల్లయ్య తనని అతి తెలివిగా ఓడించేశాడనీ, తనకి రావలసిన సొమ్ము కన్న తాను ఇవ్వవలసినది చాలా ఎక్కువనీ కోటీశ్వరుడు ఆలస్యంగా గ్రహించాడు.

28వ రోజున కోటీశ్వరుడు 13 లక్షల పై చిలుకు ఇవ్వవలసి వచ్చింది. చివరి రెండు రోజులలోనూ అతడు పూర్తిగా దివాళా తీసేశాడు.

28వ లక్షకి రూ. 13 42 177.28 కో.

29వ లక్షకి రూ. 26 84 354.56 కో.

30వ లక్షకి రూ. 53 68 709.12 కో.

ఆఖరి రోజున ఇచ్చి పుచ్చుకోవడాలు అయ్యాక కోటీశ్వరుడు చతికిలపడి, తనకి వచ్చిన 30 లక్షల రూబుళ్ళకి తానెంత ఇచ్చుకోవలసి వచ్చిందో లెక్కలు వేసుకుంటే ఆ మొత్తం 1 07 37 418 రూబుళ్ళు 28 కోపెక్కులు అని తేలింది. సుమారు 110 లక్షలు!.... ఇదంతా ఒకే ఒక కోపెక్కుతో మొదలయింది. ఆ పుల్లయ్య రోజుకి మూడేసి లక్షల చొప్పున ఇచ్చినా అతడికి నష్టం ఏమీ ఉండదు.

32వ బొమ్మ : "ఒక్కటంటే ఒక్క కోపెక్కు"

3

ఈ కథ పూర్తి చేసే ముందు ఆ కోటీశ్వరుడి నష్టం, లేదా 1+2+4+8+16+32+64+ ..... మొత్తం వేగంగా తెలుసుకునే పద్ధతి ఒకటి చూపిస్తాను. ఈ క్రింది చూపిన సంఖ్యల లక్షణాన్ని గమనించండి.

1 = 1

2 = 1+1

4 = (1+2)+1

8 = (1+2+4)+1

16 = (1+2+4+8)+1

32 = (1+2+4+8+16)+1 వగైరా, వగైరా....

ఇందులోని ప్రతి సంఖ్యా, దాని ముందున్న సంఖ్యల అన్నింటి మొత్తానికి ఒకటి కలుపగా వచ్చిన దానికి సమానం అని తెలుస్తూనే ఉంది కదా? కనుక, ఇటువంటి అంకెలు కూడవలసి వచ్చినప్పుడు, ఉదాహరణకి 1 నుంచి 32 768 వరకూ గల సంఖ్యలన్నీ కూడవలసి వస్తే, ఆఖరి సంఖ్యకి (అంటే 32 768కి) అంతకుముందున్న అన్ని సంఖ్యల మొత్తం కలపాలి. దీనిని మరో మాటలో చెప్పాలంటే,

32 678 + (32 678–1)

ఈ పద్ధతి ఉపయోగించి కోటీశ్వరుడు ఇచ్చుకున్న మొత్తం సొమ్ము ఎంతో తెలుసుకోవచ్చు. అతడిచ్చిన ఆఖరి మొత్తం 53 68 709 రూ. 12 కోపెక్కులు కనుక, మనకు కావలసిన మొత్తం :

53 68 709.12 + 5 368 709.11 = 1 07 37 418.23

53. పుకారులు

పుకారులు ఎంత వేగంగా విస్తారిస్తాయో గమనిస్తే ఆశ్చర్యం కలుగుతూ ఉంటుంది. ఒకరిద్దరు వ్యక్తులు మాత్రమే చూసిన సంఘటన రెండు గంటల లోపున పట్టణం అంతా మారుమోగిపోవడం జరుగుతూ వుంటుంది. ఇంతటి అసాధారణ వేగంతో వార్తా ప్రసారం జరగడం చిత్రంగా ఉంటుంది.

కాని, అంక గణిత ప్రక్రియలు ఉపయోగించి పరిశీలిస్తే, ఇందులో విచిత్రం ఏమీ ఉండదు. ఈ క్రింది సంఘటన పరిశీలిద్దాం.

1

రాజధానీ నగరం నుంచి 50000 జనాభా గల ఒక పట్టణానికి ఉదయం 8 గంటలకి వచ్చిన ఒక వ్యక్తి చాలా సరదా అయిన వార్త ఒకటి తనతో తీసుకువచ్చాడనుకుందాం. అతడు బస చేసిన ఇంట్లో ముగ్గురికి మాత్రమే ఈ వార్త తెలియజేశాడనుకుందాం. ఈ పని చేయడానికి 11 నిమిషాలు పట్టిందనుకుందాం.

అంటే, ఉదయం 8.15కి ఈ వార్త కేవలం నలుగురికి మాత్రమే (కొత్తగా వచ్చిన వాడికీ, మరో ముగ్గురు స్థానికులకూ) తెలిసిందన్న మాట.

ఈ ముగ్గురిలో ప్రతి ఒక్కడూ ఈ తాజా వార్తని మరో ముగ్గురికి చెప్పారనుకుందాం. ఈ పని చెయ్యడానికి మరో పదిహేను నిమిషాలు పడుతుంది. అంటే, అరగంటలో ఈ వార్త 4 + (3 × 3) = 13 మందికి తెలుస్తుంది.

మళ్ళీ ఆ తొమ్మిది మందిలో ఒక్కొక్కరూ ముగ్గురేసి మనుష్యులకు చెప్పారనుకుంటే 8.45 గంటలకి ఆ వార్త తెలిసినవారు 13+(3×9)=40 మంది ఉంటారు.

ఈ విధంగానే ఈ వార్తా ప్రసారం జరిగితే, అంటే వార్త విన్న ప్రతి ఒక్కరూ మరో ముగ్గురికి 15 నిమిషాలలో వినిపిస్తూ పోతే దాని ఫలితం ఈ క్రింది విధంగా ఉంటుంది.

33వ బొమ్మ : పుకారులు వ్యాపించే పద్ధతి

9 గంటలకి 40 + (3×27) = 121 మందికి,

9.15 గంటలకి 121+(3×81)=364 మందికి,

9.30 గంటలకి 364+(3+243)=1093 మందికి ఈ వార్త తెలుస్తుంది.

అంటే, ఒకటిన్నర గంటల వ్యవధిలో ఈ వార్త సుమారు 1100 మందికి తెలిసిపోతుంది. 50 వేల జనాభా గల పట్టణంలో ఈ సంఖ్య ఏమంత పెద్దది కాదనిపిస్తుంది. ఊరంతా పొక్కిపోవడానికి ఇంకా చాలాకాలం పడుతుందని కొందరు అనుకోవచ్చు కూడానూ. ఎంత వేగంగా ఈ వార్తా ప్రసారం జరుగుతుందో ఇంకా చూద్దాం.

9.45 గంటలకి 1 093 + (3 × 729) = 3 280 మందికి, 10 గంటలకి 3 280 + (3 × 2 187) = 9 841 మందికి తెలుస్తుంది.

మరో 15 నిమిషాలలో సుమారు సగం జనాభాకి తెలిసిపోతుంది :

9 841 + (3 × 6 561) = 29 524.

అంటే, 8 గంటలకి ఒకే ఒక్కరికి తెలిసిన వార్త, 10.30 గంటలకల్లా ఊరంతా తెలిసిపోతుందన్నమాట.

2

ఈ లెక్క ఎలా వేస్తారో చూద్దాం. మొత్తం మీద చేయవలసిన పని అల్లా ఈ క్రింది సంఖ్యలను కూడడమే. 1+3+ (3×3) + (3×3×3) (3×3×3×3) +.... వగైరా. క్రిందటి లెక్కలో చేసినట్లుగా + (1+2+4+8+ .... వగైరా కూడినట్లుగా) వీటిని కూడటానికి సులభమార్గం ఏదైనా ఉందేమో? అవును. ఉంది. ఈ సంఖ్యలను ఈ క్రింది విధంగా రాస్తే సులభం అవుతుంది.

1 = 1

3 = 1×2+1

9 = (1+3)+2+1

27 = (1+3+9)×2+1

81 = (1+3+9+27)×2+1... వగైరా.

మరో మాటలో చెప్పాలంటే వీటిలో ప్రతి సంఖ్యా అంతకు ముందున్న అన్ని సంఖ్యల మొత్తాన్ని రెట్టింపు చేసి 1 కలుపగా వచ్చిన సంఖ్యకి సమానం.

కనుక, 1 నుంచి ఏ సంఖ్య వరకూ అయినా సరే మొత్తం కావాలంటే, అందులోని ఆఖరి సంఖ్యకు అందులోని సగం (1 తీసి వేరొక) కలిపితే చాలు. ఉదాహరణకి,

1+3+9+27+81+243+729

= 729+(728/2)=729+364−1093.

3

మన కథలోని ప్రతి పౌరుడూ తనకు తెలిసిన రహస్యాన్ని మరో ముగ్గురికి మాత్రమే తెలియజేస్తాడు. కాని, ఆ ఊళ్ళోని జనం నోట్లో నువ్వు గింజ సుతరామూ నానని వాళ్ళు అయి, ఆ రహస్యాన్ని కేవలం ముగ్గురికి మాత్రమే కాక, ఐదుగురికో, పదిమందికో చేరవేస్తూ పోయినట్లయితే ఆ పుకారు మరింత వేగంగా పాకిపోతుంది. ఐదుగురికి చెప్పినట్లయితే ఏమయేది ఈ క్రింద చూపించాను :

8 గంటలకి ఈ వార్త తెలిసిన వారి సంఖ్య =			1
8.15	ıı	ıı	1+5=6
8.30	ıı	ıı	6+(5×5)=31
8.45	ıı	ıı	31+(25×5)1=56
9.00	ıı	ıı	156+(125×5)=781
9.15	ıı	ıı	781+(625×5)=3906
9.30	ıı	ıı	3906+(3125×5)=19531

అంటే 9.45 అయ్యేసరికి ఆ నగరంలోని 50 వేల మందిలో ప్రతి ఒక్కరికీ ఈ వార్త తెలిసిపోతుంది.

ఒక్కొక్కరు పదేసి మందికి చెప్తూ పోతే ఈ వార్త ఎంత వేగంగా ప్రచారం అవుతుందో చూద్దాం :

8.00 గంటలకి ఆ వార్త తెలిసిన వారి సంఖ్య = 1			
8.15	॥	॥	1+10=11
8.30	॥	॥	11+100=111
8.45	॥	॥	111+1000=1111
9.00	॥	॥	1111+10000=11111

తరువాతి సంఖ్య 111 111 కనుక, ఆ వార్త 9 గంటల పైన మరికొన్ని నిమిషాలకే ఊళ్ళో అందరికీ తెలిసిపోతుంది. అంటే సుమారు ఒక గంట వ్యవధిలో ఊరంతా పొక్కిపోతుంది.

54. సైకిలు మోసం

అక్టోబర్ విప్లవానికి రష్యాలో రకరకాల కంపెనీలు తమ దగ్గర ఉన్న తుక్కు సరుకును విడుదల చేసుకోవడానికి ఎన్నెన్నో జిత్తులు అవలంబించేవారు. మంచి ప్రచారంలో ఉన్న ఏ వార్తా పత్రికలోనో ఈ క్రింద చూపిన రకం ప్రకటనతో కథ మొదలు అయేది :

సైకిలు = 10 రూబుళ్ళకే!

కేవలం 10 రూబుళ్ళకే సైకిలు దొరుకుతుంది!

ఈ సదవకాశాన్ని జారవిడవకండి!

50 రూబుళ్ళు చేసే సైకిలు 10 రూబుళ్ళకి!

కోరిన వారికి రూల్సు ఉచితంగా పంపబడును.

ఈ గాలానికి తగులుకుని రూల్సు పంపవలసిందని అడిగిన వాళ్ళు కోకొల్లలు. వారికందరికీ కేటలాగు పోస్టులో వచ్చేసేది.

10 రూబుళ్ళు పంపిన వారికి, సైకిలు కాదు, నాలుగు కూపన్లు వచ్చేవి. పోస్టులో. ఆ కూపన్లు అందుకున్న వారు తమ స్నేహితులకు ఒక్కొక్క కూపను పదేసి రూబుళ్ళ చొప్పున వాటిని అమ్మాలి. ఆ విధంగా వచ్చిన 40 రూబుళ్ళనూ కంపెనీకి పంపితే అతనికి సైకిలు పంపుతారు. కనుక, ఈ వ్యక్తి తన జేబులో నుంచి కేవలం

10 రూబుళ్ళు మాత్రమే ఇచ్చారు. మిగిలిన 40 రూబుళ్ళూ అతడి మిత్రులు జేబులలోంచి వచ్చాయి. తాను స్వయంగా 10 రూబుళ్ళు ఖర్చు పెట్టడమే కాకుండా, ఆ కూపన్లు కొనుక్కోగల మనుష్యుల వేటలో అతడు కొంత శ్రమపడాలి. నిజమే కాని, అందువల్ల అతనికి ఖర్చు ఏముంది?

ఈ కూపన్లు ఏమిటి? వాటిని పదేసి రూబుళ్ళకు కొనుక్కున్న వారికి వాటి వల్ల వచ్చే లాభం ఏమిటి? ఆ కొనుక్కున్నవారు కంపెనీకి ఆ రసీదు పంపితే పోస్టులో 5 కూపన్లు వస్తాయి. అంటే 10 రూబుళ్ళు పెట్టి 5 కూపన్లు కొనుక్కున్నారన్నమాట. ఆ కూపన్లను పదేసి రూబుళ్ళకి ఐదుగురికి అమ్మి, 50 రూబుళ్ళు సంపాదించి, సైకిలు కొనుక్కోవడానికి హక్కుదారు అయ్యాడన్నమాట. ఆ కూపన్లు కొనుక్కున్న వారికి మళ్ళీ ఐదేసి కూపన్ల చొప్పున వస్తాయి. ఇతరులకు అమ్ముకోడానికి.... ఇలాగ సాగిపోతుంది.

మొదటిసారిగా చూస్తే ఇందులో మోసం ఏమీ లేదనిపిస్తుంది. ప్రకటన వేసిన కంపెనీ తన హామీని అక్షరాలా పాటించింది. కొనుక్కున్న వాళ్ళకి సైకిలు నిజానికి 10 రూబుళ్ళకే దొరికింది. కంపెనీకి కూడా నష్టం ఏమీ లేదు. ప్రతి సైకిలుకి పూర్తి మొత్తం 50 రూబుళ్ళు వాళ్ళకి ముడుతూనే వుంది.

అయినా సరే, ఇందులో గొప్ప మోసం ఉందని తెలిసిపోతూనే వుంది. ఈ కూపన్లు అమ్మలేక నష్టపోయిన జనం చాలా ఎక్కువ. ఇదిగో, ఈ మనుష్యులు కంపెనీకి రావలసిన తక్కిన సొమ్మును తమ జేబులలోంచి తీసి ఇచ్చారు. కూపన్లు ఉన్న వాళ్ళకు వాటిని అమ్మలేని స్థితి ఎప్పటికో అప్పటికి రాక తప్పలేదు. ఈ సంగతి గ్రహించడానికి పెన్సిలు, కాగితం తీసుకుని లెక్కలు వేద్దాం. కూపన్లుదారుల సంఖ్య ఎంత వేగంగా పెరిగి పోతుందో తెలుస్తుంది.

మొట్టమొదటి సారి కొనుక్కునే వారికి కూపన్లు సరాసరి కంపెనీ నుంచే వస్తాయి. వాళ్ళకి ఆ కూపన్లు అమ్మడం సాధారణంగా కష్టం కాదు. వీరిలో ప్రతి ఒక్కరూ మరో నలుగురు స్నేహితులను ఈ ఊబిలోకి లాగుతారు. తరువాత గ్రూపులో వారు తమ కూపన్లు 20 మందికి (4 × 5) అమ్మాలి. ఆ పని చెయ్యడానికి ఆ స్కీము వల్ల ఎంత లాభమో వివరించి నమ్మించాలి. విజయవంతంగా ఆ పని చేయగలిగారనుకుందాం. అంటే, మరో 20 మంది ఈ రంగంలోకి దిగుతారన్నమాట.

ఈ 20 మంది ఐదేసి కూపన్ల చొప్పున 100 మందికి కూపన్లు అంటగట్టాలి.

మొట్టమొదటి కంపెనీ నుంచి తిన్నగా కూపన్లు కొనుక్కున్న ప్రతివారూ ఇప్పటి వరకూ 1+4+20+100=125 మందిని ఈ ఆటలోకి తీసుకువచ్చాడన్నమాట. ఇందులో 25 మందికి సైకిళ్ళు లభించాయి. మిగిలిన 100 మందికీ సైకిళ్ళు దొరుకుతాయనే ఆశ మాత్రమే లభించింది. ఈ ఆశని ఒక్కొక్కరు పదేసి రూబుళ్ళు పెట్టి కొనుక్కున్నారు.

ఈ "వరద" స్నేహబృందాన్ని అధిగమించి ఊరంతా చుట్టుముట్టడం మొదలు పెడుతుంది త్వరలోనే. ఇంక కొత్త కొనుగోలుదారులు దొరకడం అంతకంతకు కష్టతరం అయిపోతుంది. చివర కొనుక్కున్న 100 మంది తమ కూపన్లు 500 మందికి అమ్మాలి. వారు మరో 2500 మందిని ఆకర్షించాలి. త్వరలోనే పట్టణం అంతా కూపన్ల వరదలో మునిగిపోతుంది. కూపన్లు అమ్ముతామనే వారే కాని, కొనుక్కునే వారు దొరకరు.

క్రిందటి పుకారు సమస్యలో లాగే, ఈ కూపన్లు కొనుక్కున్నవారి సంఖ్య కూడా అతి వేగంగా పెరిగిపోతంది. ఆ అంకెల "పిరమిడ్" ఈ క్రింద చూపినట్లు ఉంటుంది :

1	1వ రౌండ్
4	2వ రౌండ్
20	3వ రౌండ్
100	4వ రౌండ్
500	5వ రౌండ్
2500	6వ రౌండ్
12500	7వ రౌండ్
62500	8వ రౌండ్

ఆ పట్టణం చాలా పెద్దది అయితే, అందులో సైకిలు తొక్కేవారి సంఖ్య 52,500 అయితే ఈ వరద ఎనిమిదవ "రౌండు"తో విచ్ఛిన్నమై పోతుంది. అప్పటికి ప్రతి ఒక్కడి దగ్గరా కూపన్లు ఉంటాయి. అందులో 5వ వంతు జనాభాకి మాత్రమే సైకిళ్ళు దొరుకుతాయి. మిగిలిన 4/5వ వంతు కూపన్లు కొనుక్కున్న జనాభాకి వాటిని అమ్ముకునే అవకాశాలు సున్న.

ఆ పట్టణం బాగా పెద్దది అయితే, ప్రస్తుతపు మహా పట్టణాలలాగ అనేక మిలియన్ల జనాభా ఉన్నవి అయినా సరే, మరికొద్ది రౌండ్లలో ఈ ఆట ఆగిపోకతప్పదు. ఏమంటే, ఈ అంకెల పిరమిడు అధిక వేగంతో పెరిగిపోతుంది. 9వ రౌండు నుండి ఈ అంకెలు ఎలా పెరుగుతాయో ఇక్కడ చూపబడింది :

3 12 500	9వ రౌండ్
15 62 500	10వ రౌండ్
78 12 500	11వ రౌండ్
3 90 62 500	12వ రౌండ్

దీనిని బట్టి 12 రౌండ్లు అయ్యేసరికి దేశం దేశం అంతా ఈ ఆటలోకి ఈడ్వబడుతుంది. అందులో 4/8వ వంతు జనాభా పూర్తిగా మోసగింపబడతారు.

ఆ కంపెనీకి ఎంత లాభమో చూద్దాం. జనాభాలో 1/5వ వంతు మందికి సైకిళ్ళు కొనిపెట్టడానికి 1/5వ వంతు మందిని బలవంతపెట్టారు. 4/5వ వంతు జనాభాకి కలిగిన నష్టం వల్ల 1/5వ వంతు జనాభా బాగుపడ్డారు. పైగా తమ చచ్చు సరుకు అమ్మడానికి జీతం బత్తెం లేని రేచుకుక్కల లాంటి "సేల్స్‌మన్" లక్షల కొద్దీ బయలుదేరతారు. "మోసపు వరద" అని దీనిని ఒక రష్యను రచయిత చక్కగా చిత్రించాడు. లెక్కలు కట్టడం చేతకాని సామాన్య ప్రజలే అత్యధికంగా మోసగింపబడతారు.

55. బహుమతి

ఈ కథ పూర్వకాలంలో రోములో జరిగినది అంటారు."*

1

రోమను సేనాధిపతి టెరెన్షియస్ విజయ యాత్రలు ముగించుకుని, రాజధానికి తిరిగి వచ్చి, చక్రవర్తి దర్శనం కావాలని విన్నపం పంపించుకున్నాడు.

చక్రవర్తి సాదరంగా అతడికి దర్శనం ఇచ్చాడు. రోమను సామ్రాజ్య విస్తరణకు అతడు చేసిన గొప్ప పనులకు సంతోషం వెలిబుచ్చాడు. అతడి గౌరవానికి తగినట్లుగా సెనేటులో ఉచిత స్థానం ఇప్పిస్తానని మాట ఇచ్చాడు.

---

* ఇంగ్లండులోని ఒక లైబ్రరీలోని లాటిన్ ప్రతికి ఇది స్వేచ్ఛానువాదం.

కాని, టెరెన్షియస్‌కి కావలసినది అది కాదు.

“దేవర కీర్తి పతాకం నలుదిక్కులా రెపరెపలాడటానికి నా చేతనైన మటుక్కి శక్తి వంచన లేకుండా కృషి చేశాను. నేను మరణం అంటే భయపడలేదు. నాకు ఇదికాక ఇంకా పునర్జన్మలంటూ వుంటే వాటినన్నిటిని దేవరవారి సేవకే వినియోగిస్తాను. కాని, యుద్ధాలు చేసి చేసి విసిగిపోయాను. నా వయస్సు అయిపోయింది. నా రక్తంలో మునుపటి ఉడుకు ఇప్పుడు లేదు. మా స్వగ్రామం పోయి శేషజీవితాన్ని నిశ్చింతగా గడుపుదామని ఉంది.”

“అయితే నీకు ఏం కావాలో చెప్పు” అన్నాడు చక్రవర్తి.

“దేవర చిత్తగించాలి. నా జీవితం అంతా యుద్ధరంగంలోనే గడిపాను. నా కత్తిని శత్రు రక్తంతోనే కడుగుతూ వచ్చాను. ధన సంపాదనకు నాకు తీరికే లేకపోయింది. నేను బీదవాణ్ణి ....”

“ఊ, కానియ్యి” అన్నాడు చక్రవర్తి.

“ఈ మీ సేవకుడియందు దయ ఉంచండి. మీ ఔదార్యంతో నా చివరి రోజులు దేనికీ లోటు లేకుండా సుఖంగా గడిచిపోవాలి. బిరుదుల మీదా, సన్మానాల మీదా, సెనేటులో స్థానాల మీదా నాకు మనసు లేదు. సీజరు ప్రభూ! ఈ హడావిడి నుంచి దూరంగా పోయి విశ్రాంతిగా గడపాలని ఉంది. నా జీవితం సుఖంగా గడిచిపోవడానికి తగినంత డబ్బు ఇప్పించండి.”

ఆ చక్రవర్తి ఉదారుడేమీ కాదు. నిజానికి లుబ్ధుడనే చెప్పాలి. డబ్బు మూట విప్పడమంటే అతడికి ప్రాణాలు కొట్టుకుపోతాయి. కొంచెంసేపు ఆలోచించాడు.

“ఏ పాటి సొమ్ము కావాలనుకుంటున్నావో అదీ చెప్పు.”

“పది లక్షల దీనారాలు చాలు సీజరు ప్రభూ!”

చక్రవర్తి మౌనం వహించాడు. తల వంచుకుని సేనాపతి నిరీక్షిస్తున్నాడు.

ఆఖరికి చక్రవర్తి ఇలా అన్నాడు :

“టెరెన్షియస్! నువ్వు గొప్ప వీరుడివి. నీ ధైర్యసాహసాలకి తగిన సత్కారం జరిగి తీరవలసిందే. రేపు మధ్యాహ్నం మా నిర్ణయం వినిపిస్తాం.”

టెరెన్షియస్ వంగి సలాము చేసి, వెళ్ళిపోయాడు.

2

మరునాడు టెరెన్షియస్ రాజదర్శనానికి వచ్చాడు. చక్రవర్తి అతడికి సాదరంగా స్వాగతం ఇచ్చాడు.

సేనాధిపతి వినయంగా నమస్కరించాడు.

"సీజరు ప్రభువు నిర్ణయం తెలుసుకోవడానికి వచ్చాను. నాకు తగిన బహుమతి ఇప్పిస్తామన్నారు."

"అవునవును. నీలాంటి మహావీరుడికి చచ్చు సంభావనలాగ ఏదో ఇచ్చి పంపించడం ఉచితం కాదని మాకు తోచింది. మా ఖజానాలో 50 లక్షల ఇత్తడి నాణెములున్నాయి. వాటి విలువ 10 లక్షల దీనారాలు. జాగ్రత్తగా విను. నువ్వు ఖజానాకి వెళ్ళి ఒక ఇత్తడి నాణెం తీసుకువచ్చి మాకు ఇవ్వాలి. మరునాడు రెండు ఇత్తడి నాణెములకు సమానమైన ఒక పెద్ద ఇత్తడి నాణెం తీసుకువచ్చి మాకు ఇవ్వాలి. మూడవ రోజున 4 ఇత్తడి నాణెములకు సమానమైన ఒక ఇత్తడి నాణెం తీసుకురావాలి. నాలుగవ రోజున 8 రెట్లు, ఐదవ రోజున 16 రెట్లు.... ఈ విధంగా రోజు రోజుకీ రెట్టింపు విలువ గల ఇత్తడి నాణెం తెచ్చి ఇస్తూ ఉండు. నీ కోసమని ప్రత్యేకంగా ప్రతి రోజూ అవసరమైనంత పెద్ద ఇత్తడి నాణెం అచ్చు వేయవలసిందిగా హుకుం జారీ చేశాము టంకశాలకి. నీకు శక్తి ఉన్నంత వరకూ ఖజానా నుంచి నాణెములు తెచ్చి ఇస్తూ ఉండు. ఆ పని కేవలం నీవు ఒక్కడివే, ఏ సహాయమూ లేకుండా చెయ్యాలి. నువ్వు నాణెం తీసుకురాలేని మరుక్షణంలో మన ఈ ఒప్పందం రద్దు అయిపోతుంది. అప్పటి వరకూ నీవు తెచ్చి ఇచ్చిన నాణెముల విలువ బట్టి నీకు అంత సొమ్ము ఇప్పిస్తాను."

చక్రవర్తి మాటలను ఆశగా విన్నాడు టెరెన్షియస్. ఖజానా నుంచి తాను తెచ్చుకోగల అపార ధనరాసులను మనస్సులోనే ఊహించుకున్నాడు.

"సీజరు ప్రభుల ఔదార్యానికి కృతజ్ఞుడిని. ఈ బహుమతి ప్రదాన వైఖరి అపూర్వంగా ఉంది" అని సంతోషం వెలిబుచ్చాడు.

3

ఆనాటి నుంచీ టెరెన్షియస్ ఖజాన నుంచి దర్బారుకి ఇత్తడి నాణెములు తెచ్చి ఇవ్వడం మొదలుపెట్టాడు. తొలి రోజులలో నాణెములను తీసుకురావడం ఆటలాగా కనిపించింది.

మొదటి రోజున టెరెన్షియస్ తెచ్చిన నాణెం 21 మి.మీ. వ్యాసం కలిగి, 5 గ్రాముల బరువున్నది.

రెండవది 10 గ్రాములు, మూడవది 20 గ్రాములు, నాలుగవది 40 గ్రాములు, ఐదవది 80 గ్రాములు, ఆరవది 160 గ్రాముల బరువులున్నాయి.

ఏడవ నాణెం 320 గ్రాముల బరువు, 84 మిల్లీ మీటర్ల వ్యాసం కలిగి ఉంది.*

8వ రోజున మొదటి నాణెమునకు 128 రెట్లు బరువున్న నాణెం తెచ్చి ఇచ్చాడు. దాని బరువు 640 గ్రా., వ్యాసం 10.5 సెం.మీ.

9వ రోజున 256 రెట్లు బరువున్న నాణెం తెచ్చి ఇచ్చాడు. దాని బరువు 1.280 కిలోగ్రాములు, వ్యాసం 13 సెం.మీ.

12వ రోజున 7 సెం.మీ. వ్యాసం 10.25 కిలోగ్రాముల బరువూ వుంది నాణెం.

ప్రతి రోజూ టెరెన్షియస్‌ని సాదరంగా పలకరిస్తున్న చక్రవర్తికి తాము సాధించిన విజయం తాలూకు ఆనందాన్ని కప్పిపుచ్చుకోవడం కష్టంగా వుంది. ఇప్పటికి టెరెన్షియస్ 12 సార్లు ఖజానా నుంచి నాణెములు తెచ్చాడు. వాటి మొత్తం విలువ 2000 ఇత్తడి నాణెములు.

13వ రోజున టెరెన్షియస్ తెచ్చిన నాణెం, అసలు నాణెం కన్న 409 రెట్లు పెద్దది. దాని వ్యాసం 34 సెం.మీ., బరువు 20.5 కిలోగ్రాములు.

ఆ మరునాడు ఇంకా పెద్ద నాణెం – 41 కిలోగ్రాముల బరువూ, 42 సెం.మీ. వ్యాసమూ ఉంది.

"వీరుడా! అలిసిపోయినట్లున్నావు" అన్నాడు చక్రవర్తి వస్తూన్న చిరునవ్వును ఆపుకుంటూ.

"లేదు ప్రభూ!" అన్నాడు టెరెన్షియస్, నుదుటి మీది చెమట తుడుచుకుంటూ.

---

* నాణెం బరువు మొదటి దాని కన్న 64 రెట్లు అయితే, దాని వ్యాసం, మందము 4 రెట్లు మాత్రమే అధికం. ఏమంటే, $4 \times 4 \times 4 = 64$ కనుక. కథలో ముందు ముందు నాణెముల సైజు లెక్క వేయవలసినప్పుడు ఈ విషయాన్ని గుర్తుంచుకోవడం అవసరం.

తరువాత 15వ రోజు, ఆనాడు అసలు నాణెం కన్న 16,384 రెట్లున్న నాణెం తీసుకురావడానికి టెరెన్షియస్ ఆపసోపాలు పడ్డాడు. దాని వ్యాసం 53 సెం.మీ. బరువు 80 కి.గ్రా. అది ఇంచుమించు అతడి అంత బరువూ వుంది.

16వ రోజున నాణెంను వీపు మీద పెట్టుకుని తెస్తూంటే, సేనాధిపతి కాళ్ళు జవజవలాడి పోయాయి. అసలు నాణెంకి 32,768 రెట్లు విలువైనది. బరువు 164 కి.గ్రా., వ్యాసం 67 సెం.మీ. టెరెన్షియస్ ఆయాసపడుతూ దర్బారుకి వచ్చాడు. చక్రవర్తి చిరునవ్వు ఒలకబోశాడు.

ఆ మరునాడు టెరెన్షియస్‌ని చూసి రాజు పకపకా నవ్వేడు. ఆ రోజున నాణాన్ని మోయలేక నేల మీద దొర్లించుకుంటూ వచ్చాడు. దాని వ్యాసం 84 సెం.మీ. బరువు 328 కి.గ్రా. విలువ 65 536 నాణెములు.

అతడి ధన సంపాదన 18వ రోజుతో ఆఖరు అయిపోయింది. ఖజానా నుంచి దర్బారుకి నాణెం తీసుకురావడం ఈ రోజుతో ఆఖరు. దాని విలువ 1,31,012 నాణెములు. దాని వ్యాసం ఒక మీటరు దాటింది. బరువు 655 కిలోగ్రాములు. తన బల్లెం ఊతంతో ఆ నాణాన్ని దర్బారు హాలులోకి తీసుకురాగలిగాడు. చక్రవర్తి సమీపంలో దభేలుమని నేల మీద పడింది.

34వ బొమ్మ :
పదిహేడవ నాణెము

టెరెన్షియస్ అలిసిపోయాడు. “ఇంక చాలు” అని ఆయాసపడ్డాడు.

చక్రవర్తి నవ్వు ఆపుకోలేకపోయాడు. సేనాధిపతిని తెలివిగా ఓడించాడు.

టెరెన్షియస్ ఇంతవరకూ తెచ్చిన నాణెముల మొత్తం విలువ లెక్క కట్టించాడు. అతడికి ఇవ్వవలసిన మొత్తం 2,62,143 ఇత్తడి నాణెములని తేలింది.

అదిగో ఆ విధంగా సేనాధిపతి అడిగిన సొమ్ములో 20వ వంతు మాత్రమే ఇచ్చాడు పిసినిగొట్టు చక్రవర్తి.

టెరెన్షియస్ తీసుకువెళ్ళిన నాణెముల విలువలూ, బరువులూ సరిచూద్దాం :

1వ రోజు	1 నాణెం, బరువు	5 గ్రాములు
2వ రోజు	2 నాణెములు, బరువు	10 గ్రాములు
3వ రోజు	4 నాణెములు, బరువు	20 గ్రాములు
4వ రోజు	8 నాణెములు, బరువు	40 గ్రాములు
5వ రోజు	16 నాణెములు, బరువు	80 గ్రాములు
6వ రోజు	32 నాణెములు, బరువు	160 గ్రాములు
7వ రోజు	64 నాణెములు, బరువు	320 గ్రాములు
8వ రోజు	128 నాణెములు, బరువు	640 గ్రాములు
9వ రోజు	256 నాణెములు, బరువు	1.280 కిలో గ్రాములు
10వ రోజు	512 నాణెములు, బరువు	2.560 కిలో గ్రాములు
11వ రోజు	1024 నాణెములు, బరువు	5.120 కిలో గ్రాములు
12వ రోజు	2048 నాణెములు, బరువు	10.240 కిలో గ్రాములు
13వ రోజు	4096 నాణెములు, బరువు	20.480 కిలో గ్రాములు
14వ రోజు	8192 నాణెములు, బరువు	40.960 కిలో గ్రాములు
15వ రోజు	16384 నాణెములు, బరువు	81.920 కిలో గ్రాములు
16వ రోజు	32768 నాణెములు, బరువు	163.840 కిలో గ్రాములు
17వ రోజు	65536 నాణెములు, బరువు	327.680 కిలో గ్రాములు
18వ రోజు	131072 నాణెములు, బరువు	655.360 కిలో గ్రాములు

రెండవ నిలువు వరుసలో ఉన్న సంఖ్యల మొత్తం కట్టడం చాలా సులభం (లాభసాటి బేరం కథలో చెప్పినట్లే). ఆ మొత్తం 2,62,143కి సమానం. టెరెన్షియస్ కోరిన మొత్తం 10 లక్షల దీనారాలు. లేక 50 లక్షల ఇత్తడి నాణెములు. నిజానికి అతడికి లభించిన మొత్తం :

50,00,000 ÷ 2,62,143 = సుమారు 19వ వంతు

56. చదరంగపు గళ్ళ కథ

ప్రపంచంలో బహుపురాతనమైన ఆటలలో చదరంగం ఒకటి. అనేక శతాబ్దాల పూర్వమే ఈ ఆటను కనిపెట్టారు. కనుక, దానిని గురించి ఎన్నెన్నో కథలూ, గాథలూ ప్రచారంలో ఉండటంలో ఆశ్చర్యం ఏముందీ? ఆ కథలు నిజమో కాదో తేల్చడం ఇప్పుడెవరికీ సాధ్యం కాదు. అటువంటి కథలలో ఒకటి వినిపిస్తాను. ఈ కథ అర్థం అవడానికి చదరంగం ఎలా ఆడాలో తెలియనవసరం లేదు. చదరంగం బల్ల మీద 64 గళ్ళు ఉంటాయని తెలిస్తే చాలు.

1

ఈ కథ భారతదేశం నుంచి వచ్చింది.

"షేరామ్" అనే రాజుకి చదరంగం అంటే వల్లమాలిన అభిమానం. ఈ ఆట కనిపెట్టిన వ్యక్తి తన దేశ ప్రజలలో ఒకడు అని తెలిసి, అతడిని స్వయంగా సత్కరించే ఉద్దేశంతో దర్బారుకి పిలిపించాడు.

చదరంగం ఆటను కనిపెట్టిన "సెస్సా" అనే ఆసామీ రాజు ముందుకి వచ్చి నిలువ బడ్డాడు. అతడు బహుసామాన్యమైన దుస్తులలో బీదవాడని తెలుస్తూనే వుంది. అతను వృత్తి చేత ఉపాధ్యాయుడు.

"నువ్వు కనిపెట్టిన చదరంగం మాకు నచ్చింది. నీకు ఈనాము ఇవ్వాలనుకుంటున్నాం" అన్నాడు రాజు.

సెస్సా వంగి సలాము చేశాడు.

"నీ కోరిక ఏమిటో చెప్పు."

సెస్సా ఏమీ మాట్లాడలేదు.

35వ బొమ్మ : "రెండవ గడికి రెండు..."

"సిగ్గుపడకు. నీకేం కావాలో చెప్పు. నీ కోరిక తీర్చే పని మాది" అని రాజు ప్రోత్సహించాడు.

"ప్రభువుల ఔదార్యానికి అవధులు లేవు. నాకు రేపటి వరకూ వ్యవధి ఇప్పిస్తే ఆలోచించుకుని నా కోరికను విన్నవించుకుంటాను."

మరునాడు సెస్సా దర్బారుకి వచ్చి వినిపించిన బహు అల్పమైన కోరికను విని రాజు ఆశ్చర్యపోయాడు.

"ఏలినవారికి దండాలు" అని సెస్సా మొదలు పెట్టాడు. చదరంగపు గళ్ళల్లో మొదటి గడికి ఒక గోధుమ గింజ ఇప్పించండి."

"మామూలు గోధుమ గింజేనా?" రాజు తన చెవులను తానే నమ్మలేకపోయాడు.

"చిత్తం. రెండవ గడికి 2 గింజలు, మూడవ గడికి 4 గింజలు, నాలుగవ గడికి 8 గింజలు, ఐదవ గడికి 16 గింజలు, ఆరవ గడికి 32 గింజలు, ఏడవ గడికి...."

"ఆపు, అర్థం అయింది" అన్నాడు రాజు చికాకుగా.

"వెళ్ళిన కొద్దీ రెట్టింపు గోధుమ గింజలు చొప్పున చదరంగం బల్ల మీద 64 గళ్ళకూ గింజలు కావాలి. అంతే కదా? ఇస్తాం, కాని ఏ అల్పమైన కోరిక మా ఔదార్యానికి, ఠీవికీ తగినది మాత్రం కాదు. ఇటువంటి క్షుద్రమైన కోరిక కోరి

మాయందు అవిధేయత ప్రకటించుకున్నావు. బడిపంతులుకి మహారాజుల ఔదార్యం అర్థం అవడం కష్టమే! నువ్వు ఇంక వెళ్ళవచ్చు. మా నౌకర్లు నీకు రావలసిన గింజలు పట్టుకువచ్చి ఇస్తారు."

సెస్సా చిరునవ్వు నవ్వి, వంగి సలాము చేసి, బయటికి వెళ్ళిపోయాడు.

2

మధ్యాహ్నం భోజన సమయంలో రాజుగారికి సెస్సా జ్ఞాపకం వచ్చాడు. ఆ పిచ్చివాడికి ఈనాము అందిందా అని వాకబు చేశాడు.

"ప్రభువుల ఆజ్ఞా నిర్వహణలోనే కరణాలు నిమగ్నులై ఉన్నారు. అతడికివ్వవలసిన గింజల మొత్తం లెక్కలు వేస్తున్నారు" అని సమాధానం వచ్చింది.

రాజు చిరాకు పడ్డాడు. తన ఆజ్ఞను ఇంత ఆలస్యంగా అమలుపరచబడటం అతడికి అలవాటు లేదు.

శయన మందిరానికి వెళ్ళే ముందు రాజు మళ్ళీ అడిగాడు, సెస్సాకి గోధుమల మూట పంపించారా అని.

"కరణాలు నిరంతరాయంగా లెక్కలు వేస్తూనే ఉన్నారు ప్రభూ! తెల్లవారే సరికి లెక్కలు పూర్తి అవుతాయనే నమ్మకంతో ఉన్నారు."

"ఇంత ఆలస్యం ఏమిటి?" అన్నాడు రాజు కోపంగా. "నేను నిద్రలేచేసరికి సెస్సాకి ఇవ్వవలసిన ధాన్యం ఒక్క గింజ తగ్గకుండా ఖచ్చితంగా అందాలి. నేను రెండోసారి చెప్పను."

తెల్లవారుతూనే కరణాల పెద్ద ప్రభువుల దర్శనార్థం వేచి ఉన్నాడని రాజుగారికి విన్నవించారు. అతడిని ప్రవేశ పెట్టవలసిందని రాజు ఆజ్ఞాపించాడు.

"నువ్వు చెప్పదలచుకున్న ఏమిటో తరువాత చెబుదువు గాని, ముందు ఆ బడిపంతులుకి గోధుమలు అందాయా?" అన్నాడు రాజు.

"ఈ విషయం గురించి విన్నవించుకోడానికే ఇంత పెందలాడే ఏలినవారి దర్శనార్థం వచ్చాను. సెస్సాగారికి ఇచ్చుకోవలసిన గింజల మొత్తం బహు శ్రద్ధగా శ్రమించి గుణించి చూశాం. ఆ సంఖ్య బహు పెద్దది అని చెప్పడానికి ....."

"ఎంత పెద్దది అయినా సరే" రాజు అర్ధోక్తిలోనే అందుకున్నారు. మన ధాన్యాగారాలు నిండుగానే వున్నాయి. మేము వాగ్దానం చేసిన ప్రకారం ఇవ్వవలసిందే."

"సెస్సాగారి కోరిక తీర్చడానికి తగినన్ని గింజలు ఏలినవారి ధాన్యాగారాలలో లేవు ప్రభూ! మన దేశం మొత్తం మీద అన్ని గింజలు లేవు. అంతే కాదు, ప్రపంచం అంతా గాలించినా లేవు. దేవరవారి వాగ్దానం నిలబెట్టాలంటే ప్రపంచం అంతటా గోధుమ పంట మాత్రమే వెయ్యాలి. అంతే కాదు, ఎడారులు, కొండలు, మంచు దిబ్బలు ఆఖరికి మహా సముద్రాలన్నీ ఖాళీ చేయించి ఆ ప్రదేశాలన్నీ గోధుమ పంటకి ఉపయోగించాలి. అప్పటికైనా సందేహమే ప్రభూ!"

రాజు నోట మాట లేకుండా ఉండిపోయాడు.

"ఇంతకీ ఆ గింజల మొత్తం ఎంత?" అన్నాడు కొంతసేపటికి తెప్పరిల్లి.

"18 446 744 073 709 551 615" అన్నాడు కరణాల పెద్ద.

3

మొత్తం మీద ఇదీ కథ. ఇది నిజంగా జరిగినదో కాదో మనకు తెలియదు కానీ, ఆ బహుమతి మొత్తం అంత పెద్ద సంఖ్య అవుతుందని గ్రహించడం కష్టం ఏమీ కాదు. ఓపిక ఉంటే మనమే లెక్కవేసి చూడవచ్చు. ఒకటితో మొదలుపెట్టి, 1, 2, 4, 8, 16... వగైరా సంఖ్యలు వేసి కూడాలి. 2 ని 2 పెట్టి 63 సార్లు గుణిస్తే 64వ గడిలో ఎన్ని గింజలు ఉండేది తెలుస్తుంది. "లాభసాటి బేరం" కథలో చూపించిన పద్ధతి ప్రకారం 2^{64} ఎంత అవుతుందో గుణించి, అందులో నుంచి 1 తీసివేస్తే కావలసిన మొత్తం వస్తుంది.

గుణకారం సులభం చేయడానికి పదేసి రెళ్ళ గ్రూపులు 6, నాలుగు రెళ్ళ గ్రూపు ఒకటీ తయారుచేసి గుణించవచ్చు. 2 ని 2 చేత 10 సార్లు గుణిస్తే 16 వస్తుంది. కనుక...

$2^{64} = 1024 \times 1024 \times 1024 \times 1024 \times 1024 \times 1024 \times 16$

$1024 \times 1024 - 1048576$. కనుక

$2^{64} = 1\ 048\ 576 \times 1\ 048\ 576 \times 1\ 048\ 576 \times 16$

ఇందులో ఉంచి 1 తీసివేస్తే గింజల మొత్తం వస్తుంది. ఆ సంఖ్య :

18 446 744 073 709 551 615.

ఈ సంఖ్య ఎంత పెద్దదో అర్థం కావడానికి, ఇన్ని గోధుమ గింజలు నిలువ చేయడానికి ఎంత పెద్ద ధాన్యాగారం కావాలో చూద్దాం. ఒక ఘనపు మీటరు (అంటే, ఒక మీటరు పొడవు, ఒక మీటరు వెడల్పు, ఒక మీటరు ఎత్తు) ప్రదేశంలో సుమారు 15 000 000 గోధుమ గింజలు పడతాయి కనుక, ఆ బడిపంతులు కోరిన బహుమతి మొత్తం గింజలు పోయడానికి 12 000 000 000 000 ఘనపు మీటర్లు లేదా 12 000 ఘనపు కిలోమీటర్ల ధాన్యాగారం కావాలి. మన ధాన్యాగారం ఎత్తు 4 మీటర్లు, వెడల్పు 10 మీటర్లు అయితే, దాని పొడవు 311 000 000 కిలోమీటర్లు ఉంటుంది. ఇది భూసూర్యుల మధ్య దూరానికి సుమారు రెట్టింపు !

పాపం! సెస్సా గారి కోరిక తీర్చడం ఆ మహారాజుకి అసాధ్యమై పోయింది. అతడికి గణితంలో మంచి ప్రవేశం ఉండి ఉంటే ఆ బడి పంతులుని సులభంగా బురిడీ కొట్టించ గలిగి వుండేవాడు. ఒక్కొక్క గింజే లెక్కపెట్టుకుంటూ తీసుకువెళ్ళమని సెస్సాని అడిగి ఉంటే చాలు.

సెకనుకి ఒక గింజ చొప్పున రాత్రింబవళ్ళు నిర్విరామంగా గింజలు లెక్కపెట్టుకుంటూ పోతే రోజుకి 86 400 గింజలు అవుతాయి. ఒక ఘనపు మీటరు గింజలు లెక్కపెట్టడానికి సుమారు 6 నెలలు పడుతుంది. అది 27 బుషెల్సుకి సమానం. 10 సంవత్సరాలు నిర్విరామంగా లెక్కపెడితే 550 బుషెల్సు అవుతాయి. సెస్సాగారు తన శేషజీవితం అంతా గింజలు లెక్కపెట్టడానికే వినియోగించినా అతడు కోరిన మొత్తంలో నిజంగా తీసుకు పోగలిగినది సముద్రంలో కాకిరెట్ట వంతు.

57. సంతానాభివృద్ధి

నల్లమందు కాయ నిండా చిన్న చిన్న గింజలు ఉంటాయి. అందులోని ప్రతి ఒక్క గింజా మరో మొక్క అవుతుంది. అన్ని గింజలూ మొలకెత్తితే ఎన్ని మొక్కలు అవుతాయి? ఈ ప్రశ్నకి సమాధానం కావాలంటే ఒక్కొక్క కాయలో ఎన్నేసి గింజలుంటాయో తెలుసుకోవాలి. చిన్న చిన్న గింజలను లెక్కపెట్టడం చాలా విసుగైన పనే కాని, కష్టపడి లెక్కపెట్టి తెలుసుకుంటే చాలా ఉపయోగం ఉంది. ఒక్కొక్క కాయలో సుమారు 3000 గింజలు, విత్తనాలు ఉంటాయి.

తరువాత ?

ఈ మొక్కలన్నింటికీ తగినంత స్థలం భూమి మీద ఉన్నదనుకుందాం. అప్పుడు ప్రతి విత్తనమూ మొక్క అయి, మళ్ళీ వేసవి నాటికి 3000 మొక్కలు అవుతాయి. ఒక కాయ నుంచి పెద్ద తోట అవుతుంది.

తరువాత ఏమవుతుందో చూద్దాం. ఈ 3000 మొక్కలలో ప్రతి ఒక్కటీ అధమ పక్షం ఒక్కొక్క కాయ కాస్తుంది అనుకుందాం (ఒకటి కన్న ఎక్కువ కాయలే ఉంటాయి తరచుగా). ఒక్కొక్క కాయలోని 3000 విత్తనాలు మొలకెత్తి మొక్కలు అవుతాయి. కనుక 2 ఏళ్ళ తరువాత 3000 × 300 = 9 000 000 మొక్కలుంటాయి.

3 ఏళ్ళ తరువాత :

9 000 000 × 3 000 = 27 000 000 000 మొక్కలు ఉంటాయి.

4 ఏళ్ళ తరువాత :

27 000 000 000 × 3 000 = 81 000 000 000 000

5 ఏళ్ళ తరువాత భూమి మీద నల్ల మందు మొక్కలకి ఇంక చోటే మిగలదు. ఏమంటే వాటి సంఖ్య :

81 000 000 000 000 × 3 000 = 243 000 000 000 000 000.

మన గోళం మీది భూభాగం – అంటే ఖండాలు, ద్వీపాలు అన్నీ కలిపితే మొత్తం 135 000 000 చదరపు కిలోమీటర్లు లేదా, 135 000 000 000 000 చ.మీ. ఈ సంఖ్య 5 ఏళ్ళ తరువాత నల్ల మందు మొక్కల సంఖ్యలో 2000వ వంతు.

ఒకే ఒక నల్లమందు కాయ నుంచి వచ్చిన మొక్కలూ, వాటి సంతానమూ కలిసి 5 సంవత్సరాలలో మొత్తం నేల అంతా చదరపు మీటరుకి 2000 మొక్కల చొప్పున అలుముకు పోతాయన్నమాట. ఒక చిన్న నల్లమందు కాయలో ఎంత శక్తి దాగి ఉన్నదో కదా!

నల్లమందు చెట్టు కాకపోతే ఇంతకన్న తక్కువ విత్తనాలు ఇచ్చే మరో మొక్కను దేనినైనా తీసుకుందాం. అప్పుడైనా ఇదే పరిస్థితి. కాకపోతే ఐదేళ్ళ కన్న మరి కొంచెం ఎక్కువ కాలం పడుతుంది, భూమి అంతా అలుముకు పోవడానికి. ఉదాహరణకి పొద్దు తిరుగుడు మొక్కలు తీసుకుందాం. ఒక్కొక్క మొక్క ఏడాదికి 100 గింజలు ఇస్తుంది అనుకుందాం. ఈ గింజలు అన్నీ మళ్ళీ మొక్కలు అయితే :

ఒక ఏడాది తరువాత	1	మొక్క
2వ ఏడాది తరువాత	100	మొక్కలు
3వ ఏడాది తరువాత	10 000	మొక్కలు
4వ ఏడాది తరువాత	1 000 000	మొక్కలు
5వ ఏడాది తరువాత	1 00 000 000	మొక్కలు
6వ ఏడాది తరువాత	10 000 000 000	మొక్కలు
7వ ఏడాది తరువాత	1 000 000 000 000	మొక్కలు
8వ ఏడాది తరువాత	1 00 000 000 000 000	మొక్కలు
9వ ఏడాది తరువాత	10 000 000 000 000 000	మొక్కలు

ఈ సంఖ్య భూభాగంలోని చదరపు మీటర్ల సంఖ్యకి 70 రెట్లు కనుక, 9 ఏళ్ళ తరువాత చ.మీ.కి 70 మొక్కల చొప్పున భూమి అంతా పొద్దుతిరుగుడు మొక్కలతో నిండి పోయింది.

అయితే, వాస్తవానికి ఇలా ఎందుకు జరగడం లేదు? విత్తనాలలో చాలా భాగం మొలకెత్తకుండానే చచ్చిపోతాయి. కొన్ని ఊసర క్షేత్రాలలో పడతాయి. కొన్ని ఇతర వృక్షాల చేత అణగదొక్కబడతాయి. ఈ వినాశనాలు ఏమీ లేకపోతే ప్రతి జాతి మొక్కా త్వరలోనే భూమండలం అంతా ఆక్రమించుకోవడానికి సమర్థమైనదే.

ఈ చెప్పినదంతా ఒక్క మొక్కలకే కాక, జంతు జాలానికి కూడా వర్తిస్తుంది. చావు అనేది లేకపోతే అతి స్వల్ప కాలంలోనే ఒకే ఒక్క జంతువుల జంట తాలూకు పుత్ర పౌత్రాదులతో భూమి అంతా కిటకిటలాడిపోతుంది. జీవులకు చావు అనేది లేకపోతే ఏమి అవుతుందో అప్పుడప్పుడు ఆకాశం అంతా కమ్మేసే మిడతల దండులను చూస్తే తెలుస్తుంది. నివసించడానికి చోటు కోసం ఒకదానితో ఒకటి పోరాడుకునే కోటానుకోట్ల జీవరాసులతో భూమండలం అంతా నిండిపోతుంది అతి స్వల్ప కాలంలోనే. సముద్రాలన్నీ చేపలతో నిండిపోయి, పడవలు కదలడానికి కూడా వీలుండదు. పురుగులతో, పక్షులతో ఆకాశం అంతా నిండిపోయి సూర్య దర్శనం కూడా కాదు.

మాట వరసకి మామూలు ఈగని తీసుకుందాం. దీని సంతానాభివృద్ధి బహు వేగంగా జరుగుతుంది. ఒక్కొక్క ఆడ ఈగ సుమారు 120 గుడ్లు పెడుతుంది. ఒకే ఒక వేసవి కాలంలో ఈ 120 గుడ్ల నుంచి 7 తరాల ఈగలు బయలుదేరతాయి. అందులో సగం ఆడవి. గుడ్లలో నుంచి బయటికి వచ్చిన పిల్లలు 20 రోజులలో మళ్ళీ తామే గుడ్లు పెట్టగల స్థితికి వస్తాయి. అప్పుడు పరిస్థితి ఈ విధంగా ఉంటుంది.

ఏప్రిల్ 15వ తేదీన ఒక ఆడ ఈగ 120 గుడ్లు పెట్టింది అనుకుందాం. మే నెల ఆరంభంలో అవి పిల్లలు అవుతాయి. అందులో 60 ఆడవి.

మే 5వ తేదీన ఆడ ఈగలన్నీ ఒక్కొక్కటి 120 గుడ్ల చొప్పున పెడతాయి. మే నెల మధ్యలో 60 × 120 = 72000 పిల్లలు అవుతాయి. అందులో సగం, అంటే 3000 ఆడవి.

మే 25వ తేదీన ఈ 3600 ఆడ ఈగలలో ప్రతి ఒక్కటీ 120 గుడ్లు చొప్పున పెడుతుంది. జూన్ మాసారంభంలో 3600 × 120 = 432000 ఈగలు, అందులో 216 000 ఆడవి ఉంటాయి.

36వ బొమ్మ : ఒక్క వేసవిలో తయారైన ఒకే ఒక ఈగ తాలూకు సంతానం. భూమి నుండి యురేనస్ గ్రహం వరకూ విస్తరిస్తుంది.

జూన్ 14న ప్రతి ఆడ ఈగా 120 గుడ్ల చొప్పున పెడుతుంది. ఆ మాసాంతానికి 25 920 000 ఈగలు, అందులో 12 960 000 ఆడవి.

జూలై 5వ తేదీన ఈ 12 960 000 ఆడ ఈగలు ఒక్కొక్కటి 120 గుడ్ల చొప్పున పెట్టి, మొత్తం 1 555 200 000 ఈగలను (అందులో 777 600 000 ఆడ ఈగలు) ఉత్పత్తి చేస్తాయి.

జూలై 25న 93 312 000 000 ఈగలు, అందులో 46 656 000 000 ఆడ ఈగలు ఉంటాయి.

ఆగస్టు 13 నాటికి వాటి సంఖ్య 5 598 120 000 000 ఉంటుంది. వాటిలో 2 700 360 000 000 ఆడవి.

సెప్టెంబర్ 1వ తేదీ నాటికి 355 923 200 000 000 ఈగలు అవుతాయి. ఒక్క ఆడ ఈగ నుంచి ఒక్క వేసవిలో ఉత్పత్తి అయిన ఈ మొత్తం ఈగల సంఖ్య ఎంత పెద్దదో అర్థం అవడానికి ఒక పని చేద్దాం. ఈ ఈగలు అన్నీ బతికి బట్ట కడితే, వాటినన్నింటినీ ఒక లైనులో నిలువ బెడితే, ఒక్కొక్క ఈగ పొడవు 5 మిల్లీ మీటర్లు అనుకుంటే, ఆ ఈగల వరుస పొడవు 2 500 000 000 కి.మీ. ఉంటుంది. ఆ దూరం ఎంతో తెలుసా? భూమికీ, సూర్యుడికీ మధ్యనున్న దూరానికి 18 రెట్లు ! (లేక భూమికీ, యురేనస్ గ్రహానికి మధ్య నున్న దూరానికి సమానం).

అనుకూలమైన పరిస్థితులు ఏర్పడితే జంతుజాలపు సంతానాభివృద్ధి ఎంత వేగంగా అవుతుందో చూపిస్తాను.

మొట్టమొదట అమెరికాలో పిచుకలు ఉండేవి కావు. అక్కడి పంటలను పాడుచేసే క్రిమి కీటకాలను నాశనం చేసే ఉద్దేశంతో పిచుకలను తీసుకువచ్చి విడిచిపెట్టారు. ఆకులను తినే గొంగళి పురుగులనీ, ఇతర కీటకాలను తినడంలో పిచుకలకి ఏదీ సాటి రాదని తెలుసుకదా? పిచులకి ఆ దేశం బాగా నచ్చినట్లుంది. వాటిని చంపే జంతువులు కాని, పక్షులు కాని అక్కడ లేకపోవడంతో పిచుకలు అతి వేగంతో వృద్ధి చెందాయి. క్రిమి కీటకాల సంఖ్య బాగా తగ్గిపోయిన మాట నిజమే కానీ, పిచుకల సంఖ్య విపరీతంగా పెరిగిపోయింది. తినడానికి తగినన్ని పురుగులు దొరకక అవి పంటలు పాడు చేయడం మొదలు పెట్టాయి.

ఆ పిచుకలను చంపడానికి పెద్ద ఎత్తున దాడి మొదలు పెట్టారు. అందువల్ల వల్లమాలిన ఖర్చు అయింది. దానితో, అమెరికా ఖండంలోకి కొత్త పక్షులను గాని, జంతువులను గాని దిగుమతి చేయడాన్ని నిషేధించారు.

ఇటువంటిదే మరో సంఘటన. యూరోపియనులు మొట్టమొదట ఆస్ట్రేలియా ఖండాన్ని కనిపెట్టినప్పుడు అక్కడ కుందేళ్ళు ఉండేవి కావు. శతాబ్ది చివర కుందేళ్ళను తీసుకువచ్చి ఆస్ట్రేలియాలో విడిచి పెట్టారు. అక్కడ కుందేళ్ళను చంపే జంతువులేవీ లేకపోవడం చేత, వాటి సంతానాభివృద్ధి అసాధారణమైన వేగంగా జరిగింది. త్వరలోనే కోట్ల కొద్దీ కుందేళ్ళు గుంపులు గుంపులుగా ఖండం అంతా అలంగం తిరిగి పంటలు పాడుచేయసాగాయి. దేశవ్యాప్తమైన ఆ మహా వినాశనాన్ని అరికట్టడానికి అపారమైన ధనం వెచ్చించి కుందేళ్ళ వేట సాగించారు. బహు పట్టుదలతో ఆధునిక మారణాయుధాల సాయంతో కుస్తీ పట్టడం వల్ల దేశం నాశనం కాకుండా నిలిచింది. సుమారు ఇటువంటి పరిస్థితే తరువాత కాలిఫోర్నియాలో ఏర్పడింది.

ఇటువంటిదే మరో సంఘటన జమైకాలో జరిగింది. అక్కడ విషసర్పాలు అధికంగా ఉండేవి. వాటిని చంపడానికి గద్ద జాతికి చెందిన సెక్రటరీ పక్షులను తెచ్చి విడిచి పెట్టారు. అవి పాములను చంపడంలో బహు సమర్థమైనవి. వాటి వల్ల పాముల సంఖ్య తగ్గింది నిజమే కానీ, అంతవరకూ పాముల వల్ల చస్తూ ఉన్న ఎలుకల జనాభా పెరిగిపోయింది. అవి చెరుకు తోటలను నాశనం చేయసాగాయి. ఆ ఎలుకలను చంపడానికి భారతదేశం నుంచి నాలుగు జతల ముంగిసలను తెచ్చి అక్కడ వదిలి పెట్టారు. త్వరలో ఆ ద్వీపం నిండా ముంగిసలే. ఒక్క దశాబ్దంలో అవి ఎలుకలనన్నిటినీ చంపేశాయి కానీ, మాంసం రుచి మరిగి అవి కుక్క పిల్లలనీ, మేక పిల్లలనీ, పంది పిల్లలనీ, కోళ్ళనీ, గుడ్లనీ ధ్వంసం చేయసాగాయి. వాటి సంఖ్య అత్యధికమైపోయి పళ్ళ తోటలూ, పంట చేలూ పాడుచేయడం మొదలుపెట్టాయి. ఆ ద్వీపవాసులు తమ పూర్వ మిత్రులను నాశనం చేయడానికి పూనుకున్నారు కానీ, పూర్తి విజయం సాధించలేకపోయారు.

58. భోజనం ఉచితం

స్కూల్ ఫైనల్ పరీక్షలో ఉత్తీర్ణులైన పదిమంది విద్యార్థులు ఒక హోటలుకి వెళ్ళి, డిన్నరుకి ఆర్డరు ఇచ్చారు. సర్వరు భోజనాలు తీసుకువచ్చాడు. ఆ కుర్రవాళ్ళలో చిన్న వాగ్వివాదం మొదలు అయింది. డిన్నరు టేబుల్ దగ్గర ఏ క్రమంలో కూర్చోవాలీ అనేది వివాదాస్పదం అయింది. కొందరు ఆకారాదిగా పేర్ల ప్రకారం కూర్చోవాలనీ, మరికొందరు పుట్టిన తేదీల ప్రకారం కూర్చోవాలనీ, ఇంకా కొందరు పొడుగుల వారీగా కూర్చోవాలని వాదన మొదలుపెట్టారు. తెచ్చిన వంటకాలు చల్లారిపోతున్నా వాదం తెగలేదు. భోజనానికి ఉపక్రమించడం లేదు. అంతలో సర్వరు, వాళ్ళ సమస్యని పరిష్కరించేశాడు.

"అయ్యా! మీరందరూ వాదం మాని, ఎక్కడి వారక్కడే కూర్చోండి. కాస్త నేను చెప్పబోయేది వినండి."

విద్యార్థులు ఆలకిస్తున్నారు. సర్వరు ఇలా అన్నాడు.

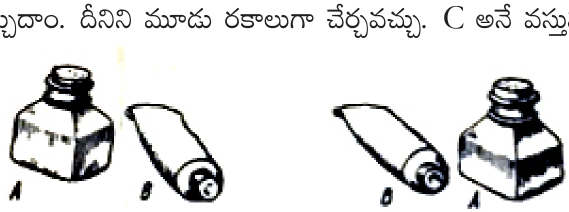
"మీరు ఈ రోజున ఏ క్రమంలో కూర్చున్నారో కాగితం మీద రాయండి. మళ్ళీ రేపు వచ్చి ఇంకో క్రమంలో కూర్చోండి. ఎల్లుండి ఇంకొక క్రమంలో, అవతలెల్లుండి మరో క్రమంలో, ఇలాగ రోజుకొక కొత్త క్రమంలో కూర్చుంటూ ఉండండి. అన్ని రకాల క్రమాలు పూర్తి అయిపోయి, ఇదిగో ఈ రోజున కూర్చున్న క్రమంలోకి రెండవసారి వచ్చిన రోజున మీకు ఉచితంగా డిన్నరు మీరు కోరిన ఏ వంటకాలైనా సరే, ఇప్పించే బాధ్యత నాది. సరేనా?"

సర్వరు చేసిన ప్రతిపాదన ఆ విద్యార్థులకు ఆకర్షణీయంగా కనిపించింది. వాళ్ళు ప్రతి రోజూ ఆ హోటలుకి వచ్చి భోజనం చేయసాగారు. వివిధ క్రమాలలో కూర్చుంటూ.

ఉచితంగా డిన్నరు తీసుకునే అవకాశం వాళ్ళకి లభించనే లేదు. దానికి కారణం సర్వరు అన్నమాట నిలబెట్టుకోకపోవడం కాదు. వాళ్ళు కూర్చోదగ్గ వివిధ క్రమాల సంఖ్య చాలా పెద్దదిగా ఉంది. మొత్తం 3 628 800 వివిధ క్రమాలు ఉన్నాయి. రోజుకి ఒకటి చొప్పున ఆ క్రమాలు అన్నీ పూర్తి చేయడానికి సుమారు 10 000 సంవత్సరాలు పడుతుంది.

నిజంగా అన్ని రకాల క్రమాలు సాధ్యమా అని మీకు సందేహం కలగవచ్చు. సౌలభ్యం కోసం A, B, C అనే మూడు వస్తువులను మాత్రమే తీసుకుని, వాటిని ఎన్ని రకాలుగా సర్దవచ్చునో పరిశీలిద్దాం.

ముందు C అనే వస్తువుని దూరంగా ఉంచేసి, మిగిలిన రెండు వస్తువులనే చూద్దాం. వాటిని రెండు రకాలుగా మాత్రమే అమర్చవచ్చు. ఇప్పుడు వాటికి C అనే వస్తువులు చేర్చుదాం. దీనిని మూడు రకాలుగా చేర్చవచ్చు. C అనే వస్తువును :



37వ బొమ్మ : రెండు వస్తువులను రెండు విధాలుగా మాత్రమే అమర్చవచ్చు.

1. ఆ జంటకి వెనుక గాని,

2. ఆ జంటకి ముందు గాని,

3. వాటి మధ్యలో గాని వుండవచ్చు.

ఈ మూడు రకాలుగా తప్ప మరోలా అమర్చడం సాధ్యం కాదు. మన జంటను AB, BA అనే రెండు రకాలుగా పెట్టవచ్చును. కనుక మొత్తం క్రమాలు $2 \times 3 = 6$.

ఈ అమరికలన్నీ 38వ బొమ్మలో చూపించాను. ఇప్పుడు A, B, C, D అనే నాలుగు వస్తువులను తీసుకుందాం. ప్రస్తుతానికి D అనే వస్తువును వేరే పెట్టేసి, మిగిలిన మూడింటినీ అమరుద్దాం. వీటిని ఆరు విధాలుగా అమర్చవచ్చునని ఇంతకు ముందే తెలుసుకున్నాం కదా? వీటికి D అనే వస్తువును చేర్చడం ఎన్ని విధాలుగా సాధ్యం? చూద్దాం. D అనే వస్తువును :

1. 3 వస్తువులను వెనుక గాని

2. 3 వస్తువులను ముందుగా గాని

3. ఒకటి, రెండు వస్తువులను మధ్య గాని

4. రెండు, మూడు వస్తువుల మధ్యగాని పెట్టవచ్చు.

కనుక $6 \times 4 = 24$ వివిధ క్రమాలు సాధ్యం అవుతాయి.

2 వస్తువులను $1 \times 2 = 2$ రకాలు గానూ,

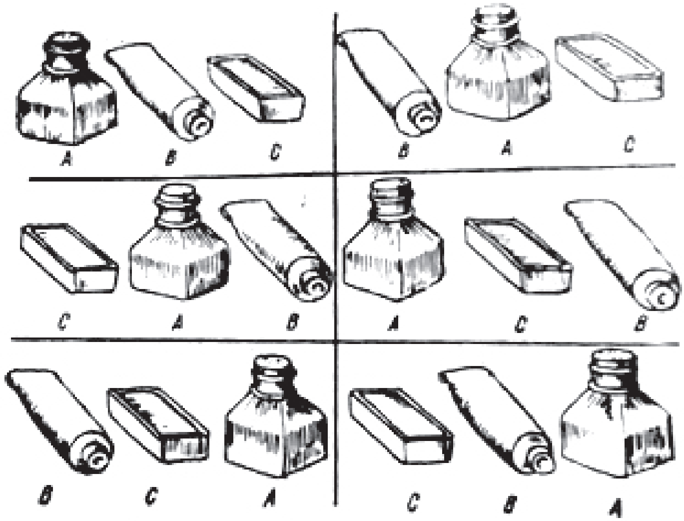
3 వస్తువులను $1 \times 2 \times 3 = 6$ రకాలు గానూ,

4 వస్తువులను $1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$ రకాలు గానూ అమర్చవచ్చు.

ఇదే సూత్రం ఉపయోగిస్తే 5 వస్తువులను $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$ వివిధ క్రమాలలోనూ, 6 వస్తువులను $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720$ రకాలుగానూ అమర్చవచ్చునని తెలుస్తుంది.

మన పదిమంది విద్యార్థుల సమస్యకి తిరిగి వద్దాం. ఈ సమస్యలో సాధ్యమయే వివిధ క్రమాల సంఖ్య :

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 = 3\ 628\ 800.$$



38 వ బొమ్మ : మూడు వస్తువులను ఆరు విధాలుగా అమర్చవచ్చు.

ఈ పదిమందిలోనూ సగం ఆడపిల్లలు అయి, వాళ్ళు ప్రతి రోజూ వేరు వేరు మగపిల్లల దగ్గర కూర్చుంటామని ముచ్చట పడినట్లయితే, మొత్తం ఎన్ని వివిధ క్రమాలు సాధ్యమో లెక్కించడం ఇంకా కష్టమైన పని. ఈ సంఖ్య పైన చెప్పిన సంఖ్య కన్న చాలా చిన్నది. అది ఎలా లెక్కించవచ్చునో చూద్దాం.

ఒక విద్యార్థి బల్ల దగ్గర తనకు తోచిన చోట కూర్చున్నాడనుకుందాం. మధ్య మధ్య ఆడపిల్లల కోసం చోట్లు వదిలేసి మిగిలిన నలుగురు మగపిల్లలూ కూర్చోగల క్రమాల సంఖ్య : $1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$. అక్కడ ఉన్న కుర్చీల సంఖ్య పది కనుక, మొదటి విద్యార్థి ఆ పది కుర్చీలలోనూ పది రకాలుగా కూర్చోవడం సాధ్యమే కనుక, మగపిల్లలు కూర్చోదగ్గ క్రమాల సంఖ్య $24 \times 10 = 240$.

5 ఖాళీ కుర్చీలలోనూ ఐదుగురు అమ్మాయిలు కూర్చోగల వివిధ క్రమాలు : $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$. మగపిల్లలు 240 క్రమాలు, ఆడపిల్లలు 120 క్రమాలతో కలిపితే మొత్తం క్రమాల సంఖ్య $240 \times 120 = 28\ 000$.

కేవలం మగవాళ్ళే ఉన్నప్పటి 3 628 800 క్రమాల సంఖ్యతో పోల్చితే ఈ 28 800 అనే సంఖ్య చాలా చిన్నది. ఈ క్రమాలు అన్నీ రోజుకి ఒకటి చొప్పున పూర్తి అవడానికి 79 సంవత్సరాలు మాత్రమే పడుతుంది. అంటే, ఆ సర్వరు నుంచి గానీ, అతడి వారసుడి నుంచి గానీ, వాళ్ళు శత వృద్ధులయే లోపున, అప్పటి వరకూ అంతా బతికి వుంటే, ఉచిత భోజనం లభిస్తుంది.

వివిధ క్రమాల సంఖ్యలను లెక్కించే పద్ధతి తెలిసింది కనుక, మన వెనుకటి "15 అంకెల పజిలు"లో ఎన్ని వివిధ క్రమాలలో ఆ 15 బిళ్ళలనూ అమర్చవచ్చునో లెక్కకట్టవచ్చును. ఆ సంఖ్య :

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 \times 11 \times 12 \times 13 \times 14 \times 15 = 1\ 307\ 674\ 365\ 000$$

ఇందులో సగం క్రమాలు అసాధ్యాలు. అంటే, అటువంటి అసాధ్య క్రమాలు సుమారు 600 000 000 000 ఉంటాయి. ఈ సంఖ్య ఇంత పెద్దది అని ప్రజలు ఊహించనైనా లేకపోయారు. కనుకనే ఆ పదిహేను అంకెల పజిలు వెర్రి అంతకాలం నడిచింది.

ఆ బిళ్ళలను సెకనుకి ఒకటి చొప్పున నిర్విరామంగా కదుపుతూపోతే అన్ని ఎత్తులూ పూర్తి అవడానికి 40 000 సంవత్సరాలు పడుతుంది!

వివిధ క్రమాల అమరికల సమస్యల ప్రకరణం ముగించే ముందు స్కూలు పిల్లలకు సంబంధించిన మరొక సమస్యను పరిశీలిద్దాం.

ఒక క్లాసులో 25 మంది విద్యార్థులున్నారు. వాళ్ళు ఎన్ని వివిధ క్రమాలలో కూర్చోగలరో తెలుసా?

ఇంతకు ముందు చెప్పిన ఈ రకపు సమస్యలను అర్థం చేసుకున్న వాళ్ళకి ఈ ప్రశ్నకి సమాధానం రాయడం కష్టమేమీ కాదు. 1 నుండి 25 వరకూ గల సంఖ్యలనన్నిటినీ గుణించడమే :

$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times .... \times 23 \times 24 \times 25.$

గణితంలో ఈ గుణకారాన్ని సులభతరం చేసే ప్రక్రియ ఏదీ లేదు, బండగా గుణించడం తప్ప.*

ఈ లబ్ధం 26 అంకెల సంఖ్య. ఆ సంఖ్య యొక్క గురుత్వాన్ని ఊహించడానికి కూడా మనకు శక్తి చాలదు. ఆ సంఖ్య ఇదీ :

15 511 210 043 330 985 984 000 000

ఇంతవరకూ మనం చెప్పుకుంటూ ఉన్న సంఖ్యలన్నిటిలోకి ఇదే పెద్దది. ఈ రాక్షసి సంఖ్యతో పోల్చితే మహా సముద్రాలన్నిటిలోని నీటి చుక్కలను కలిపితే వచ్చే సంఖ్య బహు స్వల్పమైనది!

59. నాణెములతో తమాషా

నా చిన్నతనంలో మా అన్నయ్య నాణెములతో చేసే తమాషా ఒకటి చూపించారు, నాకు బాగా జ్ఞాపకం.

---

* ఉజ్జాయింపుగా కావాలంటే ఒక సులభ పద్ధతి ఉంది. 1 నుంచి n వరకూ గల "ఇంటెగ్రల్స్"ని వరుసగా గుణించవలసిన అవసరం గణితంలో కలుగుతూ ఉంటుంది. ఈ లక్ష్యాన్ని n! అనే గుర్తుతో సూచిస్తారు. దానిని n - ఫాక్టోరియల్ అని చదువుతారు. పైన సూచించిన 25 అంకెల లబ్ధాన్ని 25!అని రాస్తారు. 18వ శతాబ్దంలో జేమ్స్ స్టర్లింగ్ అనే స్కాట్లండు దేశపు గణిత శాస్త్రజ్ఞుడు ఈ రకమైన లబ్ధములను ఉజ్జాయింపుగా తెలుసుకునే ఫార్ములా ఒకటి కనుగొన్నాడు. దానిని ఇలా రాయవచ్చు:

$$n! \approx \sqrt{2xn}\,(n / e)^n$$

ఈ ఫార్ములాలో ఉపయోగించిన n=3.141..., e =2.718.... అనే సంజ్ఞలు గణితంలో తరచు వినియుక్తం అవుతూ వుంటాయి. స్టర్లింగ్ ఫార్ములా ఉపయోగించి, లాగరిథమిక్ టేబుల్స్ సహాయంతో దాని విలువను కనుక్కోవచ్చును.

$$25! \approx 1.55 \text{ X } 10.^{25}$$

ముందర బల్ల మీద వరుసగా మూడు పళ్ళెములు పెట్టాడు. మొదటి పళ్ళెంలో ఒకదాని మీద ఒకటి దొంతగా 1 రూబులు బిళ్ళ, 50 కోపెక్కుల బిళ్ళ, 20 కోపెక్కుల బిళ్ళ, 15 కోపెక్కుల బిళ్ళ, 10 కోపెక్కుల బిళ్ళ పెట్టాడు.

ఇప్పుడు చేయవలసిన పని ఏమిటంటే, ఈ క్రింద చెప్పిన నియమాలు పాటిస్తూ నాణెముల దొంతరని 3వ పళ్ళెంలోకి మార్చాలి.

1. ఒక్కొక్కసారి ఒక్కొక్క నాణెం మాత్రమే కదపాలి.

2. చిన్న నాణెం పైన పెద్ద నాణెం పెట్టరాదు.

3. మధ్యలో ఉన్న పళ్ళెమును పై రెండు నియమాలు పాటిస్తూ తాత్కాలికంగా నాణెములను ఉంచడానికి ఉపయోగించవచ్చును కానీ, ఆఖరికి నాణెముల దొంతర మూడవ పళ్ళెంలోకి మార్చాలి.

"రూల్సు చూశావు కదూ! చాలా సులభమైనవి, మరి మొదలుపెట్టు" అన్నాడు మా అన్నయ్య.

నేను 10 కోపెక్కుల నాణెం తీసి రెండవ పళ్ళెంలో ఉంచాను. అక్కడితో ఆగిపోయాను. మరి 20 కో. నాణెం పెట్టడానికి చోటు ఏదీ? అది మొదటి రెండింటి కన్నా పెద్దది కదా?

"దానికేముందీ? 10 కో. తీసి 15 కో. మీద పెట్టు. అప్పుడు ఖాళీ అయిన 3వ పళ్ళెంలో 20 కో. పెట్టు" అని మా అన్నయ్య సలహా ఇచ్చాడు.

అలాగే చేశాను. అక్కడితో నాకా కష్టాలు గట్టెక్కలేదు. మరి 15 కో. ఎక్కడ పెట్టను. నాకు దారి కనిపించింది అంతలో. 10 కో. తీసి 1వ పళ్ళెంలో పెట్టాను. 15 కో. తీసి 3వ పళ్ళెంలో పెట్టాను. ఇప్పుడు ఖాళీ అయిన రెండవ పళ్ళెంలో 50 ఉంచాను. ఇలాగే చాలా మార్పులు చేసి చేసి ఆఖరికి రూబులు నాణెమును 1వ పళ్ళెం లోంచి తీయగలిగాను. తరువాత అన్నింటినీ సరియైన దొంతరగా 3వ పళ్ళెంలోకి మార్చగలిగాను.

"ఇంతకీ మొత్తం ఎన్ని ఎత్తులు వేశావూ?" అన్నాడు మా అన్నయ్య నేను సమస్యని సాధించగలిగినందుకు మెచ్చుకుంటూ.

"తెలియదు. నేను లెక్కపెట్టలేదే" అన్నాడు.

"సరే ఇప్పుడు లెక్కపెడదాం. కనీసపు ఎత్తులలో సమస్యని సాధించడం ఎలాగో తెలుసుకోవాలి. ఉదాహరణకి 5 నాణెములు కాక 15 కో., 10కో., రెండే రెండు నాణెములతో ఆట మొదలుపెట్టాం అనుకుందాం. అప్పుడు ఎన్ని ఎత్తులు కావాలి?

మూడు ఎత్తులు. ముందు 10 కో. రెండవ పళ్ళెంలోకి వెడుతుంది. తరువాత 15 కో. మూడవ పళ్ళెంలోకి, ఆఖరుకు 10 కో., తీసి 15 కో. మీద పెట్టాలి."

"సరే, ఇప్పుడు 20 కో. నాణెం కూడా కలిపి మూడింటితో ఆట మొదలుపెడదాం. అప్పుడు ఎన్ని ఎత్తులు కావాలీ? ముందర చిన్న నాణెములు రెండింటినీ 2వ పళ్ళెంలోకి మార్చాలి. ఆ పని చెయ్యడానికి 3 ఎత్తులు కావాలి అని తెలుసుకున్నాం కదా? తరువాత 20 కో. తీసి 3వ పళ్ళెంలో పెట్టాలి. అది నాలుగో ఎత్తు, తరువాత 2వ పళ్ళెంలోని రెండు నాణెములనీ, 3వ పళ్ళెంలోకి మార్చడానికి మరో 3 ఎత్తులు, మొత్తం 3 + 1 + 3 = 7 ఎత్తులు కావాలి."

"నాలుగు నాణెములు మార్చడానికి ఎన్ని ఎత్తులు కావాలో నేను లెక్క వేస్తాను" అని నేను అన్నాను. "మొట్టమొదట 3 నాణెములను 2వ పళ్ళెంలోకి మార్చాలి. దానికి 7 ఎత్తులు కావాలి. తరువాత 50 కో. తీసి 3వ పళ్ళెంలో పెట్టాలి. అది ఒక ఎత్తు. ఆ తరువాత మొదటి 3 నాణెములు 3వ పళ్ళెంలోకి మార్చాలి. అది మరో 7 ఎత్తులు, మొత్తం 7 + 1 + 7 = 15 ఎత్తులు."

"సెభాష్, మరి 5 నాణెములుంటేనో?"

39వ బొమ్మ : పురోహితులు బిళ్ళలను మార్చడానికి అహోరాత్రులూ శ్రమించాలి.

"నాకు తెలుసు. 15+1+15=31 ఎత్తులు" అని సమాధానం ఇచ్చాను వెంటనే.

అర్థం అయింది కదా? ఇంతకన్న సులభంగా ఎత్తులను లెక్కపెట్టే పద్ధతి ఉంది చెప్పనా? ఇంతవరకూ మనకు వచ్చిన ఎత్తుల సంఖ్యలు 3, 7, 15, 31. ఈ సంఖ్యలు

అన్నీ 2 ను 2 చేత ఒకసారి గాని. అనేకసార్లు గాని గుణించి 1 తీసివేస్తే వచ్చేవే. చూడు" అని మా అన్నయ్య రాసి చూపించాడు :

$3 = 2 \times 2 - 1$

$7 = 2 \times 2 \times 2 - 1$

$15 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 - 1$

$31 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 - 1.$

"నాకు తెలిసింది. ఎన్ని నాణెములు వున్నాయో అన్నిసార్లు 2 ని 2 చే గుణించి, అందులో నుంచి 1 తీసి వెయ్యాలి. ఇప్పుడు ఎన్ని నాణెములు ఇచ్చినా సరే ఎన్ని ఎత్తులలో మార్చవచ్చునో వెంటనే చెప్పెయ్యగలను. ఉదాహరణకి 7 నాణెములు ఉంటే :

$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \ -1=128-1=127$ ఎత్తులు" అన్నాను.

"బహు పురాతనమైన ఈ ఆట అర్థం అయింది కదా? మరొక కొండ గుర్తు జ్ఞాపకం పెట్టుకోవాలి. బేసి సంఖ్య నాణెములు ఉంటే మొదటి నాణెమును 3వ పళ్ళెంలోనూ, పది సంఖ్య నాణెములు ఉంటే 2వ పళ్ళెంలోనూ ఉంచాలి మొట్టమొదట."

"ఇది చాలా పాత ఆటా? నువ్వే తయారు చేశావనుకున్నాను" అని నేను ఆశ్చర్యపడ్డాను.

"ఊహూ, నేను చేసినదల్లా నాణెములు ఉపయోగించడం మాత్రమే. ఇది బహు పురాతనమైన ఆట."

ఈ ఆట భారతదేశం నుంచి వచ్చింది అంటారు. ఈ ఆటకి చాలా చిత్రమైన కథ ఉంది. కాశీలో ఒక గుడి ఉందట. బ్రహ్మదేవుడు ప్రపంచ సృష్టి చేసినప్పుడు అక్కడ 3 వజ్రపు కణికలను నిలువ బెట్టాడట. వాటిలో మొదటి కణిక మీద 64 బంగారు ఉంగరాల వంటి బిళ్ళలను ఉంచాడట; అట్టడుగున అన్నిటి కన్న పెద్ద బిళ్ళ, అన్నిటి కన్న చిన్న బిళ్ళపైన ఉండేటట్లు, అక్కడి పురోహితులు రాత్రింబవళ్ళు నిర్విరామంగా ఆ బంగారు బిళ్ళలను ఒక కణిక మీద నుంచి మరో కణిక మీదకి మార్చడానికి ఎత్తులు వేస్తూ ఉంటారట. మూడవ కణికను తాత్కాలికంగా ఉపయోగిస్తూ, నాణెముల కథలోని రూల్సే ఇక్కడ కూడా వర్తిస్తాయి. ఒక్కొక్కసారి ఒక్కొక్క బిళ్ళను మాత్రమే కదపాలి. చిన్న

బిళ్ళ మీద పెద్ద బిళ్ళ పెట్టకూడదు. ఆ పురోహితులు చెప్పే కథ ప్రకారం 64 బిళ్ళల దొంతరనూ మరో కణిక మీదికి మార్చడం పూర్తి అయేసరికి ప్రళయం వచ్చి ప్రపంచమే నాశనం అయిపోతుందిట!"

"ఈ కథే నిజమైతే ప్రపంచం ఏనాడో నాశనమై పోయి ఉండాలే" అన్నాను.

"అంటే 64 బిళ్ళలనూ మార్చడానికి ఎంతో కాలం పట్టదంటావు. అంతేనా?"

"కాక? మాట వరసకి సెకనుకి ఒక ఎత్తు చొప్పున వేస్తూ ఉంటే గంటకి 3600 ఎత్తులు పడతాయి."

"ఊ, తరువాత?"

"రోజుకి సుమారు లక్ష ఎత్తులు, పది రోజులలో పది లక్షల ఎత్తులు. ఆ 14 బిళ్ళలనూ మార్చడానికి పది లక్షల ఎత్తుల కన్న ఎక్కువ అవసరం లేదనుకుంటా."

"తప్పు. ఆ 14 బిళ్ళలనూ ఒక కణిక మీద నుంచి మరో కణిక మీదకి మార్చడానికి సుమారు 50 వేల కోట్ల సంవత్సరాలు పడుతుంది!"

"అమ్మబాబోయ్! అదెల్లాగ? 64 బిళ్ళలనూ మార్చడానికి కావలసిన ఎత్తుల సంఖ్య 2 ని 2 చేత 64 సార్లు గుణించి 1 తీసి వేయడమే కదా? ఇప్పుడే గుణించి చూస్తా ఉండు."

"సరే నువ్వు గుణిస్తూ ఉండు. ఈలోగా నాకు వేరే పనులున్నాయి" అని మా అన్నయ్య వెళ్ళిపోయాడు. నేను గుణకారాలు చేయడంలో నిమగ్నమైపోయాను. ముందు 2^{16} విలువ 65536 అని తెలుసుకున్నాను. దానిని అదే సంఖ్యచే గుణించాను. ఆ వచ్చిన దానిని మళ్ళీ అదే సంఖ్యచే గుణించి, అందులో నుంచి 1 తీసి వేశాను. ఇది అంతా చేయగా వచ్చిన సంఖ్య ఇది.*

18 446 744 073 709 551 615

మా అన్నయ్య చెప్పినది నిజమే!

భూమి పుట్టి ఎన్ని సంవత్సరాలైందో తెలుసా? శాస్త్రజ్ఞులు లెక్కలు కట్టగలిగారు. అది అయినా ఉజ్జాయింపుగానే :

* మనకి ఈ సంఖ్య సుపరిచితమైనదే. చదరంగం కనిపెట్టిన సెస్సాగారు కోరిన గోధుమ గింజల సంఖ్య ఇదే.

సూర్యుడు పుట్టి : 5 000 000 000 000 సంవత్సరాలు,

భూమి పుట్టి : 3 000 000 000 సంవత్సరాలు,

భూమి మీద జీవం పుట్టి : 1 000 000 000 సంవత్సరాలు,

మనిషి పుట్టి : 500 000 సంవత్సరాలు అయింది.

60. పందెం

"హాలీడే హోం"లో మేము భోజనం చేస్తూ ఉండగా, మా సంభాషణ "సంభావ్యత" (probability) మీదికి మళ్ళింది. అక్కడ కూర్చున్న వారిలో ఒక యువ గణిత శాస్త్రజ్ఞుడు ఒక నాణెం బయటికి తీసి ఇలా అన్నాడు.

"ఇదిగో ఈ నాణెం పైకి ఎగర వేస్తాను. బొమ్మ పడే సంభావ్యత ఏపాటి ఉంటుందో చెప్పగలరా?"

"అసలు సంభావ్యత అంటే ఏమిటో చెప్పండి ముందు. ఆ మాటకి అర్థం ఏమిటో చాలామందికి తెలియదు" అన్నారు సభ్యులు.

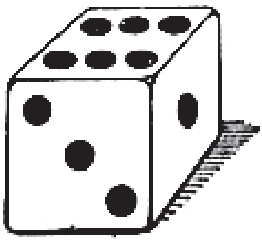
"దానికేముందీ? చాలా సులభం. నాణెం కింద పడినప్పుడు బొమ్మ అయినా పడాలి లేదా బొరుసు అయినా పడాలి. ఈ రెండే రెండు అవకాశాలు వున్నాయి (40వ బొమ్మ). వీటిలో ఏదో ఒకటే పడుతుంది. అంటే, సాధ్య ఘటనలు (possible occurrences) రెండు ఉంటాయి. అనుకూల ఘటన (favourable occurrences) ఒక్కటి మాత్రమే. వీటిని ఈ క్రింది విధంగా రాయవచ్చు :

$$\frac{\text{అనుకూల సంఘటనల సంఖ్య } 1}{\text{సాధ్య సంఘటనల సంఖ్య } 2}$$

ఈ భిన్నాంకమే బొమ్మ పడే అవకాశాన్ని లేదా సంభావ్యతని తెలుపుతుంది."

"నాణెంతో అయితే సులభమే. అంతకన్న క్లిష్టమైనది మరొకటి తీసుకుని చెయ్యండి చూద్దాం. ఉదాహరణకి పాచికలు తీసుకోండి."

40వ బొమ్మ : బొమ్మా ? బొరుసా?



41వ బొమ్మ : పాచిక

"సరే, పాచికనే తీసుకుందాం. ఇవి ఘన ఆకారంలో ఉంటాయి, ఆరు ముఖాలతో, ఆ ముఖముల మీద అంకెలు ఉంటాయి. (41వ బొమ్మ). ఈ పాచికను గిలకరించి విసిరినప్పుడు 6 చుక్కలు పడే అవకాశం లేదా సంభావ్యత ఏపాటి? అసలు సాధ్య సంఘటనలు ఎన్ని? ముఖములు 6 కనుక, 6 నుంచి 6 వరకూ ఏ అంకె అయినా పడవచ్చు. మనకు 6 అనేది అనుకూల ఘటన. కనుక 6 పడే సంభావ్యత 1/6."

"అయితే ఏ సంఘటనకు అయినా సరే సంభావ్యతను కనుక్కోవడం సాధ్యమేనా?" అని ఒక అమ్మాయి అడిగింది. "ఉదాహరణకి, మనం కిటికీలో నుంచి బయటికి చూస్తూ ఉంటే, ఆ వీధిలో వెడుతూ కనిపించే మొదటి మనిషి పురుషుడు అయి వుంటాడని నాకు ఎందుకో అనిపిస్తోంది. నా ఊహ నిజమయే సంభావ్యత ఏపాటి?"

"ప్రపంచంలో ఆడవారి సంఖ్య, పురుషుల సంఖ్య సమానం కనుక మీరు అడిగిన ప్రశ్నకి సంభావ్యత 1/2."

"అయితే, ఆ దారే వెడుతూ మనకి కిటికీలో నుంచి కనిపించబోయే మొదటి ఇద్దరు మనుష్యులూ కూడా పురుషులే అయి వుండే సంభావ్యత ఏపాటి?" అని మరొకరు ఎవరో అడిగారు.

“ఈ లెక్క మరికాస్త కష్టం. వివిధ సాధ్య సంచయములు (possible combinations) లేదా అమరికలు పరిశీలిద్దాం :

1. ఇద్దరూ పురుషులే కావచ్చు.
2. మొదటి వ్యక్తి పురుషుడూ, రెండవ వ్యక్తి స్త్రీ కావచ్చు.
3. మొదటి వ్యక్తి స్త్రీ, రెండవ వ్యక్తి పురుషుడు కావచ్చు.
4. ఇద్దరూ స్త్రీలే కావచ్చు.

ఈ నాలుగు రకాల సంచయాలలోనూ ఒక్కటి మాత్రమే అనుకూల సంచయం (అంటే మనకు కావలసిన అమరిక). కనుక మనకు కావలసినట్లు మొదటి ఇద్దరు వ్యక్తులూ పురుషులే అయి వుండే సంభావ్యత నాలుగింటిలో ఒకటి, లేదా 1/4 మీ. ప్రశ్నకు సమాధానం ఇది.

“సరే బాగానే ఉంది. మొదటి ముగ్గురూ కూడా పురుషులే అవాలనుకుంటే, అప్పుడు సంభావ్యత ఎంత?”

అదీ లెక్క కట్టవచ్చు. ముందు ఎన్ని సాధ్య సంచయములు ఉన్నాయో లెక్కవెయ్యాలి. ఇద్దరు వ్యక్తుల లెక్కలలో ఈ సాధ్య సంచయాలు 4 అని తెలుసుకున్నాం. ఇప్పుడు మరొక వ్యక్తినిచేర్చితే, ఆ వ్యక్తి స్త్రీ కావచ్చు, పురుషుడూ కావచ్చు. పై 4 సంచయాలూ స్త్రీకీ వర్తిస్తాయి. పురుషుడుకీ వర్తిస్తాయి. కనుక మొత్తం సంచయాలు: $4 \times 2 = 8$. వీటిలో ఒక్కటి మాత్రమే మనకు అనుకూలమైనది. కనుక సంభావ్యత : 1/8.

ఇంతవరకూ చెప్పిన దానిని మననం చేసుకుని, సంభావ్యతను గుణించే సామాన్య విధానం రాయవచ్చు.

ఇద్దరు వ్యక్తులుంటే సంభావ్యత : $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

ముగ్గురుంటే : $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$,

ఇలాగే నలుగురు వుంటే సంభావ్యత : $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$

ఈ విధంగా వెళ్ళిన కొద్దీ సంభావ్యత తగ్గిపోతూ ఉంటుంది.

"అయితే 10 మంది బాటసారుల విషయంలో ఈ సంభావ్యత ఎంత?"

"అంటే, కిటికీలో నుంచి చూస్తూ ఉంటే దారిన వెడుతూ కనిపించే వారిలో మొదటి పదిమంది కూడా పురుషులే అయ్యే సంభావ్యత ఎంత అనేనా మీ ప్రశ్న? పది అర్ధల లబ్ధానికి సమానం. మొదటి పదిమందీ పురుషులే అయి వుంటారని నువ్వు ఒక్క రూబులు పందెం కాస్తే, అలా జరగదని నేను 1000 రూబుళ్ళు పందెం కాయగలను!"

"అలా పందెం కాయడానికి నేను సిద్ధమే. ఒక్క రూబులుకి వెయ్యి రూబుళ్ళు అంటే లాభసాటి బేరమే."

"కాని, మీరు నెగ్గే అవకాశం వెయ్యికి ఒకటి మాత్రమే అని గుర్తుంచుకోండి."

"మరేం భయం లేదు. వెయ్యి రూబుళ్ళకు ఒక్క రూబులు పందెం అయితే, మొదటి వందమందీ పురుషులే అవుతారని పందెం కాయమన్నా కాసేస్తాను."

"ఆ సంభావ్యత ఎంత స్వల్పాతి స్వల్పమో గుర్తించారా?"

'పది లక్షలలో ఒక వంతు కావచ్చు."

'కాదు. అది మనం ఊహించలేనంత స్వల్పం. 20 మంది మనుష్యులకైతే ఆ సంభావ్యత పది లక్షలలో ఒకటి. అదే వందమంది అయితే... ఆగండి, కాగితం మీద లెక్క వెయ్యాలి. 100 మందికి అయితే ఆ సంభావ్యత.... అమ్మబాబోయ్! 1/1 000000 000 000 000 000 000 000 000 000.

"అంతేనా?"

"ఇది మీకు చిన్నదిగా కనిపిస్తోందా? సముద్రాలు అన్నీ కలిపినా అన్ని నీటి చుక్కలు లేవు. అంత కన్న ఇది 1 000 రెట్లు ఎక్కువ."

"సరే, ఒప్పుకున్నాం. నా రూబులుకి మీరు ఎంత పందెం కాయగలరో చెప్పండి."

"నాకున్నదంతా ఇచ్చేస్తాను."

"మీ ఆస్తి అంతానా? అంత ఎందుకూ? మీ సైకిలు పందెం పెట్టండి చాలు, మీకు ధైర్యం ఉంటే."

"నాకు ధైర్యం లేకపోవడమా? సరే, నేను నా సైకిలు పందెం పెడుతున్నాను. నాకు నష్టం ఏమీ ఉండదని తెలుసు."

"నాకూ భయం లేదు. పోతే రూబులు పోతుంది. అంతేగా? వస్తే సైకిలు వస్తుంది."

"కాని, అది ఎంత అసంభవమో మీకు తెలిసినట్లు లేదు. మీరు సైకిలు ఎన్నటికీ గెలవలేదు. మీ రూబులు ఉ(ట్రఉడియంలాగ నా జేబులో పడ్డట్లే."

"వద్దు, వద్దు. ఒక్క రూబులుకి సైకిలు పందెం కాయడం వట్టి వెర్రితనం" అని ఆ గణిత శాస్త్రజ్ఞుడి స్నేహితుడు సలహా ఇచ్చాడు.

"ఈ పరిస్థితులలో రూబులు పందెం కాయడం వెర్రితనం. ఆ రూబులు నాకు రాక తప్పదు."

"అతడు సైకిలు గెల్చుకునే అవకాశం కాస్తో కూస్తో ఉందిగా?"

"లేకేం? సముద్రంలో నీటి చుక్క. కాదు పది సముద్రాలలో ఒక్క నీటి చుక్క. అదీ అతడు నెగ్గే అవకాశం. నేనీ ఒక్క నీటి చుక్కకి ఎదురుగా పది మహాసముద్రాలు పందెం ఒడ్డుతున్నానన్నమాట. నా గెలుపు తప్పదు."

అంతలో ఒక ప్రొఫెసరు వాదంలోకి దిగారు.

"నీ ఊహలు మరీ గాలిలో మేడలు సుమా!"

"అరే, మీరు కూడా అలాగే అంటున్నారా ప్రొఫెసరుగానూ!"

"అన్ని ఘటనలూ సమాన సంభావ్యత కలవి కావు అనే సంగతి మరచి పోతున్నావు. నువ్వు వేస్తున్న సంభావ్యత లెక్క. ఎప్పుడు రైటు అవుతుందో తెలుసా? సమాన సంభావ్యత గల ఘటనలకి మాత్రమే. కాని, మీరు పందెం కాస్తున్న ఘటనలు... విను విను. నీ తప్పు ఇప్పుడే గ్రహిస్తావు. మిలటరీ బేండ్ మోత వినిపిస్తోందా?"

"వినిపిస్తోంది. కాని, దానికీ, దీనికీ సంబంధం ఏమిటీ...?"

అంతలో యువ గణిత శాస్త్రజ్ఞుడి ముఖం వెల వెల బోయింది. వెంటనే లేచి కిటికీ దగ్గరకు వెళ్ళాడు.

"అవును, నేను ఓడిపోయాను. నా సైకిలుకి తిలోదకాలో" అన్నాడు విచారంగా.

61. మనలోనూ, మన చుట్టూనూ వున్న రాక్షసి సంఖ్యలు

బృహత్సంఖ్యలను చూడటానికి ఎంతో దూరం పోనక్కరలేదు. మనచుట్టూ, ఇంకా మాట్లాడితే మనలోనే ఉన్నాయి. కావలసినదల్లా వాటిని గుర్తించగల పరిజ్ఞానం. పైన ఉన్న ఆకాశం, కింద ఉన్న భూమి, చుట్టూ ఉన్న గాలి, మనలో ప్రవహించే రక్తం – అన్నీ కూడా ఇటువంటి రాక్షసి సంఖ్యలకు ఆలవాలాలే.

ఆకాశంలోని నక్షత్రాలు; వాటికీ – మనకీ, వాటికీ – వాటికీ మధ్య గల దూరాలు, వాటి పరిమాణాలు, బరువులు, వయస్సులు – వగైరాలు గమనిస్తే మన

ఊహకి అందని రాక్షసి సంఖ్యలు ఎదురు అవుతాయి. ఖగోళశాస్త్రంలో ఉపయోగించే సంఖ్యలు విపరీత ప్రమాణాలు కలవి కావడం చేతనే, పెద్ద పెద్ద సంఖ్యలను సూచించడానికి ఇంగ్లీషులో "ఖగోళ సంఖ్యలు (Astronomical Numbers)" అనే పేరు వచ్చింది. ఖగోళ శాస్త్రజ్ఞులు కొన్ని కొన్ని ఖగోళ వస్తువులను చిన్నారి వస్తువులనడం కద్దు గానీ, వాటిని కూడా మనిషితో పోల్చితే రాక్షసి ప్రమాణం గలవి అనే చెప్పాలి. మన సౌర కుటుంబంలోని కొన్ని గ్రహాలు కొద్ది కిలోమీటర్ల వ్యాసం గలవి మాత్రమే ఉన్నాయి. పెద్ద పెద్ద సంఖ్యలను తరచుగా వాడటానికి అలవాటుపడ్డ ఖగోళ శాస్త్రజ్ఞులు వాటిని బహు సూక్ష్మమైనవి అంటారు. వాటిని మిగిలిన ఖగోళ వస్తువులతో పోల్చితేనే సూక్ష్మమైనవి అవుతాయిగానీ, మనుష్యులతో పోల్చితే అవి చిన్నవేమీ కావు. ఇటీవల కేవలం 3 కిలోమీటర్ల వ్యాసం మాత్రమే గల ఒక గ్రహాన్ని కనుగొన్నారు.* దాని ఉపరితల వైశాల్యం 28 చదరపు కిలోమీటర్లు, లేదా 28 000 000 చదరపు మీటర్లు. ఒక్క చదరపు మీటరు స్థలంలో ఏడుగురు మనుష్యులు నిలుచోగలుగుతారు. కనుక, ఆ చిన్న గ్రహం మీద 196 000 000 మంది జనం నిలుచోడానికి తగినంత చోటు ఉంది.

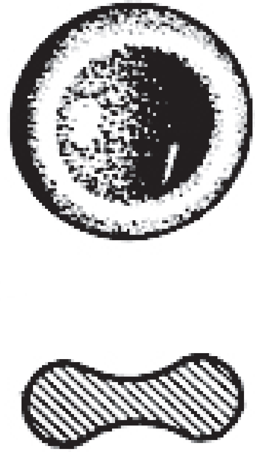
మన కాళ్ళ కింద నలిగే ఇసుకలో రాక్షసి సంఖ్యలు దర్శనమిస్తాయి. "సముద్రపుటొడ్డున ఇసుక రేణువులన్ని" అనే నుడికారం వట్టినే ఏర్పడలేదు. అన్నట్లు, మన పూర్వులు ఈ ఇసుక రేణువులను చాలా తక్కువ అంచనా వేసినట్లు కనిపిస్తుంది. వాటిని "ఆకాశంలో నక్షత్రాలన్ని" అనడం కనిపిస్తుంది. టెలిస్కోపులేని పూర్వకాలంలో ఒక అర్ధగోళంలో మనిషి మామూలు కంటికి కనిపించగల నక్షత్రాల సంఖ్య సుమారు 3500 మాత్రమే! సముద్రపుటొడ్డున ఇసుక రేణువుల సంఖ్య మనిషి మామూలు కంటికి కనబడే నక్షత్రాల సంఖ్యకి కోటానుకోట్ల రెట్లు అధికం.

మనం నిత్యమూ పీల్చే గాలిలో రాక్షసి సంఖ్యలు దాగి ఉన్నాయి. ఒక ఘనపు మీటరు స్థలంలో 27000000 000 000 000 000 అణువులు ఉంటాయి. ఈ సంఖ్య ఎంత పెద్దదో ఊహకి అందదు. ఇంతమంది మనుష్యులే కనుక మన భూమి మీద ఉంటే, వాళ్ళకి నిలుచోడానికి చోటు కూడా ఉండదు. నేలా, సముద్రాలూ అన్నీ కలిపితే 50 కోట్ల చ.కి.మీ. దీనిని చదరపు మీటర్లలోకి మార్చితే 5 00 000 000 000 000 అవుతాయి. ఇప్పుడు 2 000 000 000 000 000 000 ని పై సంఖ్యచే భాగిస్తే 54 000 వస్తుంది. అంటే, ఒక్క చ.మీ. స్థలంలో 50 000 మందికి పైగా జనం ఉంటారు.

---

* దానిని గ్రహ శకలం (asteroid) అనడం ఉచితం – అనువాదకుడు.

ప్రతి మనిషి శరీరంలోనూ ఒక రాక్షసి సంఖ్య దాగి ఉంటుంది. అదే రక్తం. ఒక్క రక్తపు చుక్కను మైక్రోస్కోపులో చూస్తే ఎర్ర రక్తకణాలు కనిపిస్తాయి. అవి గుండ్రని బిళ్ళలలాగ ఉంటాయి. (42వ బొమ్మ). అవి అన్నీ 0.007 మిల్లీ మీటర్ల వ్యాసమూ, 0.002 మిల్లీ మీటర్ల మందమూ కలిగి వుంటాయి. ఒక్క రక్తపు చుక్కలో (ఒక ఘనపు మిల్లీ మీటరు) 5 000 000 దాకా ఎర్ర రక్తకణాలు ఉంటాయి. మనిషి శరీరంలో ఎంత రక్తం ఉంటుందీ? మనిషి బరువును కిలోగ్రాములలో రాసి, దానిని 14 చే భాగిస్తే ఎంత వస్తుందో అన్ని లీటర్ల రక్తం ఉంటుంది. ఉదాహరణకి, 40 కి.గ్రా. బరువున్న మనిషిలో సుమారు మూడు లీటర్ల (లేదా 3 000 000 మిల్లీ లీటర్ల) రక్తం ఉంటుంది. కనుక, అతడి శరీరంలో ఉన్న మొత్తం ఎర్ర రక్త కణాల సంఖ్య :



42వ బొమ్మ : ఎర్రకణం

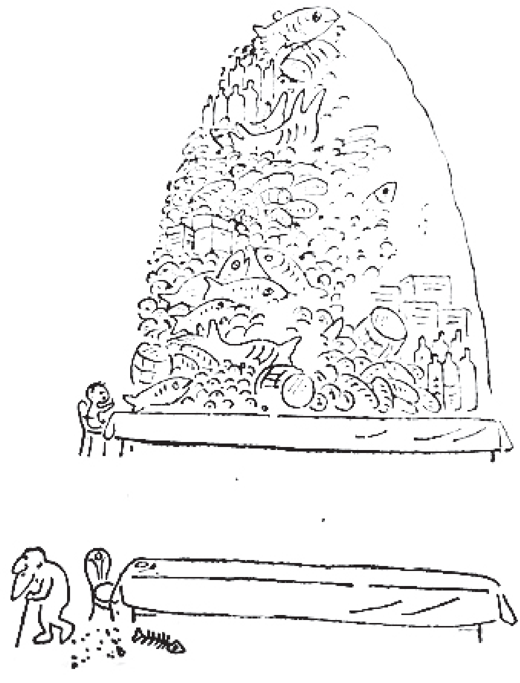
$$5\ 000\ 000 \times 3\ 000\ 000 = 15\ 000\ 000\ 000\ 000.$$

అంటే, సుమారు 15 లక్షల కోట్లు ఎర్ర రక్త కణాలు ఉంటాయి. ఈ ఎర్ర రక్త కణాలన్నింటినీ గొలుసులాగ చేస్తే ఎంత పొడుగు ఉంటుందో తెలుసా? అది లెక్కవేయడం కష్టం ఏమీ కాదు. 105 000 కిలోమీటర్ల పొడవు. భూమి చుట్టు కొలత 40,000 కి.మీ. కనుక ఈ ఎర్ర రక్తకణాల గొలుసును భూమి చుట్టూ 2.5 సార్లు తిప్పి రావచ్చు!

40 కిలో గ్రాముల బరువున్న మనిషిని కాక, సగటు సైజు మనిషిని తీసుకుంటే, అతని శరీరంలోని ఎర్ర రక్తకణాల గొలుసు మూడుసార్లు భూమిని చుట్టి వస్తుంది.

ఈ చిన్న ఎర్ర రక్తకణాలు చాలా పెద్ద పనులు చేస్తాయి. అవి ప్రాణవాయువును శరీరంలోని అన్ని అంగాలకూ మోసుకుపోతాయి. రక్తం ఊపిరితిత్తులలోకి వెళ్ళినప్పుడు ఎర్ర రక్తకణాలు ప్రాణవాయువును పీల్చుకుంటాయి. రక్తం వివిధ అంగాలలోకి వెళ్ళినప్పుడు ఆ ప్రాణవాయువును విడిచిపెడతాయి. ఏమంటే, వాటి ఉపరితల వైశాల్యం (surface area) అధికంగా ఉంటుంది. ప్రాణవాయువును పీల్చుకోవడం, విడిచిపెట్టడం అనే పనుల ఉపరితలం ద్వారానే జరుగుతాయి. కనుక, ఎంత ఎక్కువ ఉపరితలం

ఉంటే అంత మంచిది. వాటి మొత్తం ఉపరితల వైశాల్యం మనిషి యావత్తు ఉపరితల వైశాల్యానికి అనేక రెట్లు అధికం అని లెక్కలు వేసి తెలుసుకోవచ్చు. అది 1200 చ.మీ.కి సమానం. 40 మీ. పొడవు, 30 మీ. వెడల్పు ఉన్న ప్రదేశం వైశాల్యానికి సమానం! ఇది మనిషి శరీర వైశాల్యానికి 1000 రెట్లు అధికం. దీనిని బట్టి ఎర్ర రక్త కణాలు ఎంత ఎక్కువ ఉంటే అంత మంచిదని తెలిసింది కదా.



43వ బొమ్మ : మనిషి తన జీవిత కాలంలో తినగలిగిన తిండి

మనిషి తన జీవిత కాలంలో సగటు ఆయుః ప్రమాణం 70 ఏళ్ళు అనుకుంటే తినే పదార్థంను లెక్కవేస్తే అది మరో రాక్షసి సంఖ్య అవుతుంది. మనిషి తినే మొత్తం అన్నం, కూరలు, పప్పులు, పళ్ళు, మాంసం, చేపలు, గుడ్లు, నీళ్ళు, పాలు వగైరాలన్నీ మోయడానికి ఒక పెద్ద గూడ్సు రైలు బండి అవసరం అవుతుంది. రైలు బండిలో పట్టేటంత ఆహారం ఒక్క మనిషి (ఒకేసారి కాకపోయినా) తినగలడంటే ఆశ్చర్యమే!

7వ ప్రకరణం

పనిముట్లు లేకుండా కొలతలు

62. అంగలతో దూరం కొలవడం

మన దగ్గర ఎప్పుడు పడితే అప్పుడు కొలబద్దలు ఉండవు కదా. అటువంటి సమయాలలో ఉజ్జాయింపుగానైనా సరే దూరం కొలవగలగడం చాలా ఉపయోగం.

నడస్తున్నప్పుడు దూరం కొలవడానికి అంగలు ఉపయోగించవచ్చు. ఆ పని చెయ్యాలంటే మీ అంగల మధ్య దూరం తెలిసి ఉండటం అవసరం. నిజంగా అంగలు ఎల్లప్పుడూ ఖచ్చితంగా, ఒకే రీతిగా పడవు కానీ, సుమారుగా ఒకే రీతిగా ఉంటాయి. కనుక, సగటు అంగల మధ్య దూరం కొలిచి జ్ఞాపకం ఉంచుకుంటే, కొలతలకి పనికి వస్తుంది.

మొట్టమొదట అంగల సరాసరి దూరం కొలవాలి. ఈ పని కోసం కొలత సాధనం ఉండవలసిందే.

టేపు తీసుకుని, సుమారు 20 మీటర్ల దూరం కొలిచి, గుర్తులు పెట్టుకుని, ఈ దూరంలో ఎన్ని అంగలు పడతాయో నడిచి చూసుకోండి. ఉదాహరణకి, X అంగల పైన మరి కాస్త దూరం మిగిలిపోవచ్చు. ఈ మిగిలిన దూరం అంగలో సగం కన్నా తక్కువగా వుంటే దానిని వదిలెయ్యడం, సగం కన్న ఎక్కువగా ఉంటే పూర్తి అంగ కింద లెక్కపెట్టడం. ఆ తరువాత 21 మీటర్లని అంగల సంఖ్యచే భాగించగా వచ్చిన విభక్తమే సగటు అంగకి సమానం. దీనిని జ్ఞాపకం ఉంచుకోవాలి.

చాలా దూరం నడిచినప్పుడు ఎన్ని అంగలు వేశారో లెక్క మరచిపోకుండా ఉండటానికి ఒక కిటుకు ఉంది. పదేసి అంగలకి ఎడమ చేతి వేలు ఒక్కొక్కటి ముడుస్తూ

ఉండటం. ఎడమ వేళ్ళు ఐదూ మడిచాక, అంటే 50 అంగలు వేశాక, కుడిచేతి వేలు ఒకటి ముడవడం. ఆ విధంగా 250 అంగల వరకూ లెక్క పెట్టవచ్చు. తరువాత మళ్ళీ మొదటి నుంచీ లెక్క పెట్టడం. కుడిచేతి వేళ్ళు ఎన్నిసార్లు ముడవడం పూర్తి చేశావో మరిచిపోకూడదు. ఉదాహరణకి, నువ్వు అడంగు చేరేలోగా కుడిచేతి వేళ్ళు 2 సార్లు ముడిచి, మరో 3 వేళ్ళు కుడిచేతిని, 4 వేళ్ళు ఎడమ చేతినీ ముడిచావనుకుందాం. అంటే, $2 \times 250 + 3 \times 50 + 4 \times 10 = 690$ అంగలు వేశారన్నమాట. ఆఖరుసారి ఎడమ చేతివేలు ముడిచాక అధికంగా మరికొన్ని అంగలు వేసి ఉంటే వాటిని కూడా పై సంఖ్యకి కలపాలి.

అన్నట్లు, సగటు మనిషి యొక్క అంగ ఎంత పొడవు వుంటుందో లెక్క చెప్పే కొండ గుర్తు ఒకటి ఉంది. కంటి నుంచి కాలి బొటన వేలి వరకూ గల దూరంలో సగం చేస్తే అంగకి సమానం అవుతుంది.

అలాగే మరో కొండ గుర్తు. 3 సెకనులలో ఎన్ని అంగలు వేయగలడో గంటలో అన్ని కిలోమీటర్ల దూరం నడవగలడు. పెద్ద పెద్ద అంగలు వేసే వాళ్ళకు మాత్రమే ఈ రూలు వర్తిస్తుంది. ఒక అంగ పొడవు x మీటర్లు అనీ, మూడు సెకనులలో n అంగలు వేయగలడు అనీ అనుకుంటే, 3 సెకనులలో నడిచిన దూరం nx మీటర్లు అవుతుంది. గంటకి 3600 సెకనులు కనుక ఒక గంటలో నడిచిన దూరం 1200nx మీటర్లు, లేదా 1.2 nx కిలోమీటర్లు. ఈ దూరం 3 సెకనులలో వేసిన అంగల సంఖ్యకి సమానం కావాలంటే ఈ క్రింది సమీకరణం రాయవచ్చు :

$1.2\ nx = n$ లేక $1.2\ x = 1$

కనుక $x = 0.83$ మీటరు.

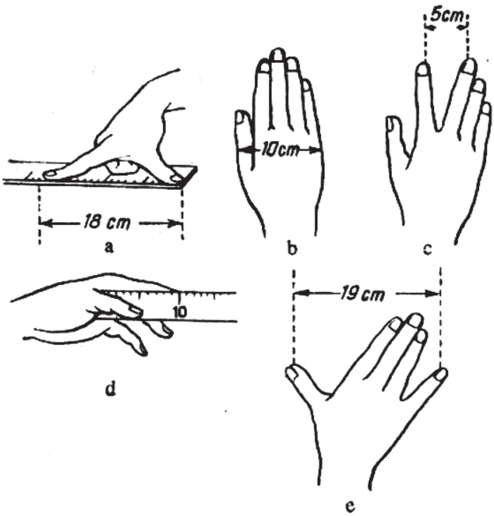
మనిషి అంగ అతడి పొడవు మీద ఆధారపడి ఉంటుందన్న సంగతి నిజం. రెండవ కొండ గుర్తు. అంటే ఇప్పుడే మనం చెప్పుకున్నది – సగటు మనిషికి, అంటే సుమారు 1.75 మీటర్లు పొడవున్న వ్యక్తికి మాత్రమే వర్తిస్తుంది.

63. సజీవమైన పనిముట్లు

కొలతబద్ద ఏదీ దగ్గరలో లేనప్పుడు చిన్న సైజు వస్తువులను కొలవడానికి ఈ పద్ధతి ఉపయోగపడుతుంది. చెయ్యి జాపి, దాని చివరి నుండి రెండవ భుజం వరకూ గల దూరం పెద్ద వాళ్ళల్లో సుమారు ఒక మీటరు ఉంటుంది. మీటరు పొడవును సుమారుగా

కొలవడానికి మరొక పద్ధతి; చేతి వేళ్ళు ఉపయోగించడం, బొటన వేలి చివర నుంచి బాగా జాపిన చూపుడు వేలి కొస వరకూ గల దూరం సుమారు 18 సెం.మీ. (cm) అటువంటివి సుమారు 6 సార్లు కొలిస్తే ఒక మీటరు అవతుంది (బొమ్మ 44a).

ఖాళీ చేతులతో ఏ విధంగా కొలవవచ్చునో దీనిని బట్టి తెలుస్తోంది. దీనికి కావలసినదల్లా ఎవరి మట్టుకి వారు తమ చేతి కొలతలు తెలుసుకుని జ్ఞాపకం ఉంచుకోవడమే.



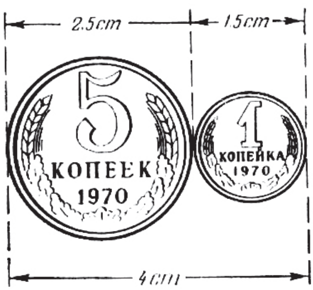
44వ బొమ్మ : కొలత పనిముట్టుగా ఉపయోగించడానికి చేతిని కొలుచుకోవాలి.

మొట్టమొదట తెలుసుకోవలసినది అరచేతి వెడల్పు (బొమ్మ 44b). పెద్దవాళ్ళలో ఈ కొలత సుమారు 10 సెం.మీ. ఉంటుంది. నీ చేతి కొలత ఇంత కన్న కొంచెం పెద్దది కావచ్చు. లేదా చిన్నది కావచ్చు. అది సరిగ్గా ఎంత ఉన్నదో కొలిచి తెలుసుకోవాలి. తరువాత బాగా జాపిన చూపుడు వేలికీ, మధ్య వేలికీ ఉన్న మధ్య దూరం (బొమ్మ 44c). బొటనవేలి కంఠం దగ్గర నుంచి చూపుడు వేలి పొడవు (బొమ్మ 44d) తెలుసుకోవడం కూడా మంచిదే. తరువాత బాగా జాపిన బొటనవేలికీ, చిటికెన వేలికీ మధ్య దూరం (బొమ్మ 44e) చాలా అవసరం.

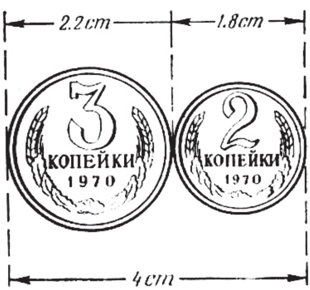
ఇదిగో ఈ "పనిముట్లు" సాయంతో సామాన్యమైన వస్తువులను కొలవవచ్చు.

64. నాణెముల సాయంతో కొలవడం

నాణెములు కూడా ఈ విషయంలో బాగా ఉపయోగపడతాయి. ఒక కోపెక్కు నాణెపు వ్యాసం 1.5 సెం.మీ. 5 కోపెక్కుల నాణెపు వ్యాసం 2.5 సెం.మీ. ఈ రెండింటినీ ఒకదాని పక్కన ఒకటి పెడితే 4 సెం.మీ. అవుతుంది. కనుక ఇటువంటి నాణెములు చాలా ఉంటే వాటి సాయంతో వస్తువులను కొలవవచ్చు. రష్యను రాగి నాణెముతో ఈ క్రింది కొలతలు తీసుకోవచ్చు.*



45వ బొమ్మ : ఒక 5 కోపెక్కుల నాణెము, ఒక 1 కోపెక్కు నాణెము కలిపి 4 సెం.మీ. అవుతుంది.



46వ బొమ్మ : ఒక 3 కోపెక్కుల నాణెము, ఒక 2 కోపెక్కుల నాణెము కలిస్తే కూడా 4 సెం.మీ. అవుతుంది.

---

* ఒక రూపాయి బిళ్ళ వ్యాసం – 28 మి.మీ.

50 పైసల నాణెం వ్యాసం – 24 మి.మీ.

20 పైసల నాణెం వ్యాసం – 22 మి.మీ.

25 పైసల నాణెం వ్యాసం – 18 మి.మీ.

1 రూపాయి + 20 పైసలు – 5 సెం.మీ.

20 పైసలు + 25 పైసలు – 4 సెం.మీ.

ఒక కోపెక్కు నాణెం వ్యాసం – 1.5 సెం.మీ.

ఐదు కోపెక్కుల నాణెములు – 2.5 సెం.మీ.

2 ఒక కోపెక్కు నాణెములు – 3 సెం.మీ.

ఒక కోపెక్కు + 5 కోపెక్కులు – 4 సెం.మీ.

2 ఐదు కోపెక్కుల నాణెములు – 5 సెం.మీ.

ఐదు కోపెక్కుల నాణెము నుంచి ఒక కోపెక్కు నాణెం తీసివేస్తే – 1 సెం.మీ.

మీ దగ్గర ఐదు, ఒక కోపెక్కు నాణెములు మాత్రమే ఉంటే అవి కూడా కొంత వరకూ ఉపయోగపడతాయి. ఈ రెండు నాణెములనూ పక్కగా చేర్చి పెడితే మొత్తం 4 సెం.మీ. అవుతుంది. (బొమ్మ 46). 4 సెం.మీ. పొడవున్న కాగితం తీసుకుని, దానిని మధ్యకు మడిచి, మరోసారి మళ్ళీ మధ్యకు మడిస్తే 4 సెం.మీ. స్కేలు వస్తుంది (46వ బొమ్మ).

కనుక ఇటువంటి వస్తువుల సాయంతో టేపు లేకపోయినా వస్తువులను కొలవడం సాధ్యమే.

అవసరమైతే నాణెములను తూనిక రాళ్ళుగా ఉపయోగించవచ్చు. చాలాకాలం వాడుకలో ఉన్న రాగి నాణెముల బరువుకి, సరికొత్త నాణెముల బరువుకీ భేదం చాలా తక్కువ.

1 నుంచి 10 గ్రాముల వరకూ తూనికరాళ్ళు సామాన్యంగా అందుబాటులో ఉండవు. కనుక, నాణెముల బరువులు తెలుసుకుని ఉండటం చాలా అవసరం.

---

* 1 రూపాయి + 50 పైసలు + 25 పైసలు – 7 సెం.మీ.

1 రూపాయి – 25 పైసలు – 1 సెం.మీ.

– అనువాదకుడు

8వ ప్రకరణం

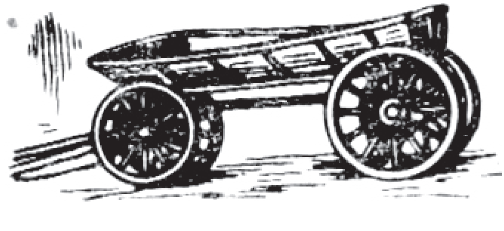
క్షేత్ర గణిత సమస్యలు

ఈ ప్రకరణంలోని ఇచ్చిన సమస్యలను సాధించడానికి క్షేత్ర గణితం క్షుణ్ణంగా తెలియవలసిన అవసరం లేదు. ఈ గణితంలో కొంచెం ప్రవేశం ఉన్న ఎవరైనా వీటిని సాధించవచ్చు. ఈ ప్రకరణంలో ఇచ్చిన 24 సమస్యలనూ సాధించి, క్షేత్ర గణితం తమకు వచ్చుననుకుంటున్న పాఠకులు, తమకు నిజంగా ఏపాటి జ్ఞానం ఉందో తెలుసుకోవచ్చును. నిజమైన పరిజ్ఞానానికి అర్థం రకరకాల క్షేత్ర గణిత సూత్రాలు కంఠతా రావడం కాదు, వాటిని వినియోగించగలగడం. తుపాకీ చేతిలో ఉండి ఏమి లాభం పేల్చడం చేతకాక పోయాక?

ఈ 24 గుళ్ళల్లోనూ ఎన్ని గురి తప్పకుండా తగులుతాయో చూసుకోండి.

65. బండి

నాలుగు చక్రాల బండికి ముందరి ఇరుసు, వెనుక ఇరుసు కన్న త్వరగా అరిగిపోతుంది (47వ బొమ్మ), ఎందుకు?

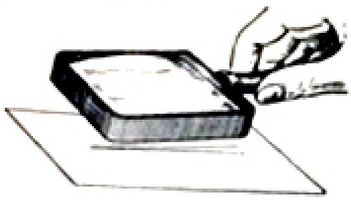


47వ బొమ్మ :

ముందరి ఇరుసు త్వరగా అరిగిపోవడానికి కారణం ఏమిటీ?

66. భూతద్దంలోంచి

$1\frac{1}{2}$ డిగ్రీల కోణాన్ని 4 రెట్లు పెద్ద చేయగల భూతద్దంలోంచి చూస్తే ఎంత పెద్దదిగా కనిపిస్తుంది (48వ బొమ్మ).



48వ బొమ్మ : కోణం ఎంత పెద్దదిగా కనిపిస్తుంది?

67. వడ్రంగుల లెవెల్ గొట్టం

గాజు గొట్టంలో బుడగతో కనిపించే వడ్రంగులు ఉపయోగించే "స్పిరిట్ లెవెల్" మీరు చూసే వుంటారు. వాలుగా వున్న నేల మీద పెడితే బుడగ కేంద్రం నుంచి పక్కకి తొలగిపోతుంది. వాలు ఎక్కువ అయిన కొద్దీ, బుడగ మరింత పక్కకి జరిగిపోతుంది. గాలి బుడగ ఆ గొట్టంలోని ద్రవం కన్న తేలిక కనుక పైకి తేలుతుంది. ఆ గొట్టం తిన్నగా వున్నట్లయితే బుడగ గొట్టం కొనకి, అంటే, అత్యున్నత స్థలానికి చేరుకుంటుంది. ఇటువంటి తిన్నని స్పిరిట్ లెవెల్ చాలా అసౌకర్యం అని మీరు గ్రహించే ఉంటారు. కనుకనే, ఈ గొట్టాన్ని వంపుగా తయారు చేస్తారు, 49వ బొమ్మలో చూపినట్లు నేల సమమట్టంగా ఉన్నట్లయితే ఆ గొట్టం యొక్క అత్యున్నత స్థానం మధ్యలో ఉంటుంది కనుక బుడగ గొట్టం మధ్యలో ఉంటుంది. నేల వాలుగా ఉన్నట్లయితే అత్యున్నత స్థానం మధ్యలో ఉండక పక్కకి జరుగుతుంది.*

ఇప్పుడు సమస్య ఏమిటంటే, గొట్టపు పంపు తాలూకు వ్యాసార్ధం ఒక మీటరు అయితే, నేల 1/2 డిగ్రీ వాలుగా ఉన్నట్లయతే మధ్య గీతకి ఎన్ని మిల్లీ మీటర్ల దూరంలోకి బుడగ జరుగుతుంది?

---

* నిజానికి గీత బుడగ నుంచి పక్కకి జరుగుతుంది అనాలి. ఏమంటే బుడగ ఉన్న చోటనే ఉండి పోతుంది, కాని గొట్టమూ, దానితో బాటు గీతా పక్కకి కదులుతాయి.

68. ఎన్ని అంచులు ?

ఈ ప్రశ్న చాలా తేలిగ్గా గానీ, చాలా క్లిష్టంగా గానీ కనిపిస్తుంది కొందరికి.

49వ బొమ్మ : వడ్రంగుల స్పిరిట్ లెవెల్.

50వ బొమ్మ : నెలవంక **51వ బొమ్మ : 12 అగ్గిపుల్లలతో సిలువ**

ఆరు పలుకలు గల పెన్సిలుకి అంచులు ఎన్ని? జవాబు చూసే ముందు బాగా ఆలోచించండి.

69. నెలవకం

50వ బొమ్మలో చూపిన నెలవంకని రెండే రెండు భుజ రేఖలతో ఆరు భాగాలుగా విభజించగలవా?

70. అగ్గిపుల్లతో తమాషా

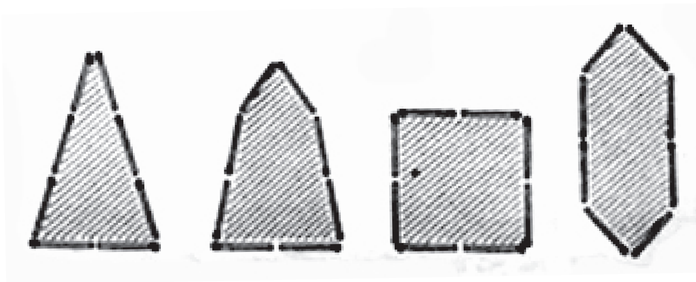
12 అగ్గిపుల్లలతో తయారుచేసి సిలువ 51వ బొమ్మలో ఉంది. దీని వైశాల్యం "5 అగ్గిపుల్లల చదరాలకు సమానం."

ఈ అగ్గిపుల్లలనే మరోలా అమర్చి, వైశాల్యం 4 అగ్గిపుల్లల చదరాలకు సమానం అయ్యేటట్లు చేయగలవా?

స్కేలు వగైరా పనిముట్లు వాడకూడదు.

71. అగ్గిపుల్లలతో మరో తమాషా

8 అగ్గిపుల్లలతో రకరకాల ఆకారాలు తయారు చేయవచ్చు. అందులో కొన్ని 52 బొమ్మలో చూపించాను. అవి అన్నీ వేరు వేరు వైశాల్యములు గలవి. ఈ 8 అగ్గిపుల్లలతోటీ అత్యధిక వైశాల్యం గల ఆకారం తయారు చెయ్యాలి. ఎలాగ?



52వ బొమ్మ : 8 అగ్గిపుల్లలతో ఎంత పెద్ద ఆకృతి ఏర్పడుతుంది?

72. ఈగ నడిచిన దారి

ఒక గాజు సిలిండరు తాలూకు పై అంచుకి 3 సెం.మీ. దిగువాయిని ఒక తేనెబొట్టు ఉంది. సరిగ్గా దానికి వ్యాసాభిముఖంగా (diametrically opposite) సిలిండరు వెలుపల ఒక ఈగ కూర్చుని ఉంది (53వ బొమ్మ).

ఈ ఈగ ఆ తేనె బొట్టును చేరుకోడానికి దగ్గర దారి చూపించు.

ఆ సిలిండరు వ్యాసం 10 సెం.మీ., ఎత్తు 20 సెం.మీ. ఆ ఈగ తనంతట తానే దగ్గరి దారి వెతుక్కుంటుందని ఊరుకోకు. ఆ పని చేయగలగాలంటే ఈగకి క్షేత్రగణితం బాగా వచ్చి ఉండాలి. పాపం దానికి అంత తెలివి ఎక్కడ?

53వ బొమ్మ : తేనెబొట్టుకి దగ్గర దారి ఈగకు చూపించు

73. ఒకే ఒక ప్లగ్గు

54వ బొమ్మలో, ఒక బల్ల చెక్కలో మూడు రకాల రంధ్రాలు ఉన్నాయి. ఒకటి చతురస్రంగానూ, మరొకటి ముక్కోణాకారంగానూ, ఇంకొకటి గుండ్రంగానూ ఉన్నాయి.

ఈ మూడింటికీ సరిపోయేలాగ ఒకే ఒక ప్లగ్గు (plug) తయారు చేయగలవా?

74. రెండవ ప్లగ్గు

పై సమస్యని సాధించగలిగితే, దీనిని కూడా సాధించు. 55వ బొమ్మలో చూపిన మూడు రకాల రంధ్రాలకు సరిపోయే ఒకే ఒక ప్లగ్గు ఎలా ఉండాలో చూపించు.

75. మూడవ ప్లగ్గు

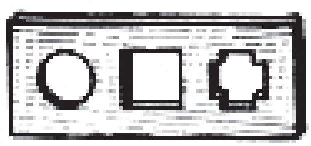
అటువంటిదే మరో సమస్య. 56వ బొమ్మలోని మూడు రంధ్రాలకూ సరిపోయే ఒకే ఒక ప్లగ్గు ఎలా ఉండాలో చూపించు.

76. నాణెములతో గారడీ

ఒక 5 కోపెక్కుల నాణెమూ, ఒక 2 కోపెక్కుల నాణెమూ తీసుకో (25 మి.మీ. 18 మి.మీ., వ్యాసములు గల గుండ్రని ఏ నాణెములు తీసుకున్నాసరే* కాగితం మీద 2–కోపెక్కుల నాణెం సైజులో ఒక రంధ్రం కత్తిరించు. ఈ రంధ్రంలోంచి 5 కోపెక్కుల నాణెం పోగలుగుతుందా?

ఇందులో గారడీ ఏమీ లేదు. కేవలం క్షేత్ర గణిత సమస్య.

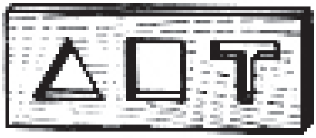
54వ బొమ్మ : ఈ మూడు రంధ్రాలకూ సరిపడే ప్లగ్గు చూపించు.



55వ బొమ్మ : ఈ మూడు రంధ్రాలకూ సరిపడే ప్లగ్గు ఉంటుందా?

---

* 24 మి.మీ. వ్యాసం గల అర్ధ రూపాయి, 18 మి.మీ. వ్యాసం గల పావలా బిళ్ళ ఉపయోగించవచ్చు – అనువాదకుడు.



56వ బొమ్మ : ఈ మూడు రంధ్రాలనూ మూసే ఒకే ఒక ప్లగ్గు చేయగలవా?

77. ఒంటి స్తంభం ఎత్తు

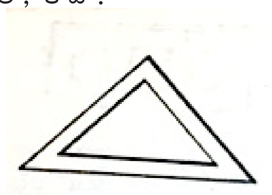
మీ ఊరిలో చాలా ఎత్తయిన ఒంటి స్తంభం ఒకటి ఉంది. అనుకో. దాని ఎత్తు ఎంతో నాకు తెలియదు కానీ, నీ దగ్గర ఆ స్తంభం తాలూకు ఫొటో ఒకటి ఉంది. ఆ ఫొటో ఆధారంగా స్తంభం ఎత్తు లెక్క వేయగలవా?

78. సమతుల్య ఆకృతులు

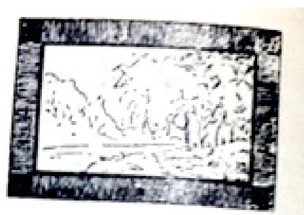
క్షేత్ర గణితంలో సమతుల్యత్వం (similarity) తెలిసిన వారికే ఈ సమస్య. ఈ క్రింది రెండు ప్రశ్నలకే జవాబులివ్వండి :

1. 57వ బొమ్మలోని రెండ త్రిభుజములూ సమతుల్యములా, కావా?

2. 58వ బొమ్మలోని ఫ్రేము తాలూకు రెండు దీర్ఘ చతురస్రములూ సమతుల్యములా, కావా?



57వ బొమ్మ : ఈ రెండు భుజములూ తుల్యములా



58వ బొమ్మ : వెలుపలి, లోపలి దీర్ఘచతురస్రములు తుల్యములా?

79. తీగముక్క నీడ

ఎండ వేళ 4 మిల్లీ మీటర్ల వ్యాసం గల తీగ తాలూకు పరిపూర్ణ ఛాయ (perfect shadow) ఎంత దూరం పడుతుంది?

80. ఇటుక

సామాన్యమైన ఒక ఇటుక బరువు 4 కిలోగ్రాములు. సరిగ్గా ఇదే మట్టితో అదే ఆకారంలో – కాని అన్ని భుజములూ నాలుగో వంతుకి కుదించి తయారు చేసిన చిన్న ఇటుక ఎంత బరువు వుంటుంది?

81. పొట్టివాడు - పొడుగువాడు

రెండు మీటర్ల పొడవున్న మనిషి, ఒక మీటరు పొడవున్న మరుగుజ్జు కన్న ఎంత ఎక్కువ బరువు వుంటాడు?

82. రెండు పుచ్చకాయలు

ఒకడు రెండు పుచ్చకాయలు అమ్ముతున్నాడు. చిన్నదాని కన్న పెద్దదాని వ్యాసం 1/4వ వంతు మాత్రమే అధికం. కాని చిన్నదానికన్న పెద్దదానికి ఒకటిన్నర రెట్లు ఎక్కువ ధర చెబుతున్నాడు. మీరు అయితే ఏ పుచ్చకాయ కొంటారు?

83. మరో రెండు పుచ్చకాయలు

60 సెం.మీ., 50 సెం.మీ. చుట్టు కొలతలు గల రెండు పుచ్చకాయలు అమ్మకానికి ఉన్నాయి. మొదటిది రెండవ దాని కన్న 1.5 రెట్లు ధర ఎక్కువ. ఈ రెండింటిలో ఏది కొంటే లాభం?

84. రేగు పండు

ఒక గుండ్రటి రేగు పండులో మధ్యలోని గింజ అంత మందాన గుజ్జు ఉంది. గింజ కన్న ఎంత ఎక్కువ గుజ్జు ఉందో నోటినే లెక్క కట్టగలవా?

85. ఐఫెల్ టవర్

300 మీటర్ల ఎత్తున్న ఐఫెల్ టవర్ కట్టడానికి 8 000 000 కిలోగ్రాముల ఉక్కు పట్టింది. ఆ టవర్ యొక్క నమూనా ఒక్క కిలోగ్రాము ఉక్కుతో చేయిస్తే అది ఎంత ఎత్తు ఉంటుంది? మామూలు గాజు గ్లాసు కన్న పెద్దదిగా ఉంటుందా? చిన్నదిగా ఉంటుందా?

86. రెండు పాత్రలు

ఒకే ఆకారం గల రెండు పాత్రలు ఉన్నాయి. రెండవ దాంట్లో కన్న మొదటి దాంట్లో 7 రెట్ల పిండి పడుతుంది. అయితే చిన్నదాని కన్న పెద్దది ఎంత ఎక్కువ బరువు వుంటుంది?

87.చలికాలంలో

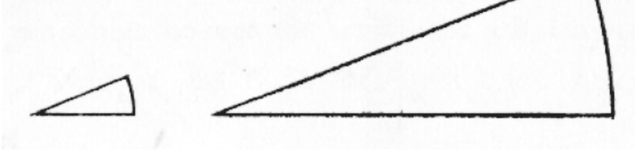
ఒక చిన్నపిల్లవాడు, ఒక పెద్దవాడు తుల్యాకృతులు గల దుస్తులు వేసుకుని చలికాలంలో వీధిలో నిల్చుంటే, ఎవరికి ఎక్కువ చలి వేస్తుందీ?

65 నుండి 87 వరకూ జవాబులు

65. మొదటిసారి వింటే ఈ సమస్యకీ క్షేత్ర గణితానికీ సంబంధం ఏమిటనిపిస్తుంది. కాని, క్షేత్ర గణితం బాగా తెలిసినవారికి ఈ సమస్యలోని అసలు కిటుకు ఎక్కడుందో ఇట్టే తెలిసిపోతుంది. క్షేత్ర గణిత సహాయం లేకుండా ఈ సమస్యని సాధించలేము.

అవును, ఇంతకి వెనుక ఇరుసు కన్న ముందున్న ఇరుసు ఎక్కువ వేగంగా ఎందుకు అరిగిపోతుంది? 47వ బొమ్మని జాగ్రత్తగా పరిశీలిస్తే ముందు చక్రాలు వెనుక చక్రాల కన్న చిన్నవి అని తెలుస్తుంది. క్షేత్రగణితం ప్రకారం ఒకే దూరం ప్రయాణం చేయడంలో చిన్న చక్రం పెద్ద చక్రం కన్న ఎక్కువ చుట్లు తిరగాలని తెలుస్తుంది. ఎక్కువ చుట్లు తిరిగిన చక్రం తాలూకు ఇరుసు త్వరగా అరిగిపోవడం సహజమే కదా?

66. భూతద్దంలోంచి చూస్తే $1\frac{1}{2}$ డిగ్రీల కోణం 4 రెట్లు పెద్దది అయి 6 డిగ్రీల కోణంలా కనిపిస్తుందని అనుకున్నారంటే పప్పులో అడుగు వేశారన్నమాటే. భూతద్దం కోణములను పెద్దది చేయదు.



59వ బొమ్మ

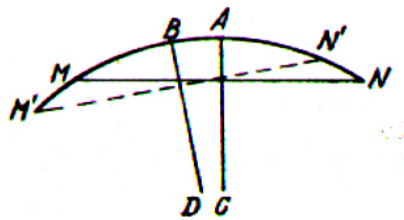
చాపం నాలుగు రెట్లు పెద్దదిగా కనిపిస్తుంది. నిజమే కానీ, దానితోబాటు వ్యాసార్ధం కూడా సరిగ్గా అన్నే రెట్లు పెద్దది అవుతుంది కనుక కోణంలో మార్పు ఉండదు. 59వ బొమ్మ ఈ విషయాన్ని విశదీకరిస్తుంది.

67. 60వ బొమ్మలో MAN అనేది స్పిరిట్ లెవల్ తాలూకు మొట్టమొదటి స్థితి. M' B' N' అనేది రెండవ స్థితి. జ్యా M' N' కీ, జ్యా MN కీ మధ్య కోణం $1/2^0$. మొట్టమొదట A అనే బిందువు దగ్గర ఉన్న బుడగ అదే చోట ఉంటుంది. కానీ, MN అనే చాపం యొక్క మధ్య బిందువు B దగ్గరకు జరుగుతుంది. ఇప్పుడు మనం లెక్క వెయ్యవలసింది AB అనే చాపం యొక్క పొడవు. ఈ చాపం యొక్క వ్యాసార్ధం ఒక మీటరు. ఆ చాపం నిర్మించే కోణం $1/2^0$.

దీనిని లెక్కవేయడం కష్టం కాదు. వ్యాసం 1 మీటరు (లేదా 1000 మి.మీ.) కనుక, దాని పరిధి : $2 \times 3.14 \times {}_2 1000 = 6280$ మి.మీ. ఒక వృత్తంలో 360^0 లేదా 720 అర డిగ్రీలు ఉంటాయి. కనుక ఒక అర డిగ్రీ :

$$6\,280 \div 720 = 8.7$$ మిల్లీ మీటర్లు.

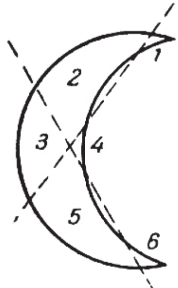
కనుక ఆ బుడగ సుమారు 9 మి.మీ. పక్కకు జరుగుతుంది (లేదా బుడగ నుంచి గుర్తు జరుగుతుంది). స్పిరిట్ లెవెల్ యొక్క వ్యాసార్ధం పెరిగిన కొద్దీ సంవేదన (Sensitivity) పెరుగుతుంది.



60వ బొమ్మ

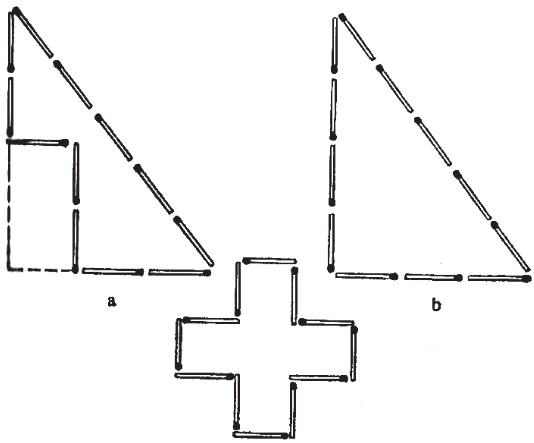
68. ఆరు పలకల పెన్సిలుకి ఆరు అంచులే ఉంటాయనుకోకండి. చెక్కని సరికొత్త పెన్సిలుకి పైనా, కిందా మరో రెండు ముఖములు ఉంటాయి కదా? వాటిని కూడా లెక్కవేస్తే మొత్తం ఎనిమిది అంచులు. దానికి నిజంగా ఆరు ముఖాలే ఉండాలంటే ఆ పెన్సిలు షడ్భుజాకారంలో కాక, చతురస్రాకారంలో ఉండాలి.

69. నెలవంకని 61వ బొమ్మలో చూపినట్లు ఖండించాలి. సౌలభ్యం కోసం అంకెలు వేయబడ్డాయి.



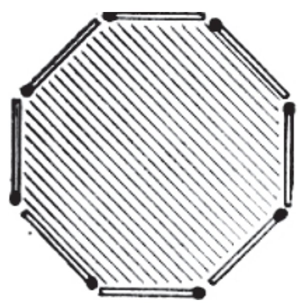
61వ బొమ్మ

70. అగ్గిపుల్లలను 62వ బొమ్మలో చూపినట్లు అమర్చాలి. దీని వైశాల్యం 4 అగ్గిపుల్లల చదరాలకు సమానం అని సులభంగానే రుజువు చేయవచ్చు. ఆ బొమ్మని త్రిభుజంగా మార్చితే ఆ త్రిభుజం యొక్క పీఠం 3 అగ్గిపుల్లల పొడవు, ఎత్తు 4 అగ్గిపుల్లల పొడవు వుంటుంది. కనుక ఆ త్రిభుజ వైశాల్యం : 1/2 × పీఠం × ఎత్తు. కనుక 1/2 × 3 × 4 = 6 అగ్గిపుల్లల చదరాలకు సమానం. కాని త్రిభుజం కన్న మనకు రావలసిన ఆకారం చిన్నది. ఎంత చిన్నది? 2 అగ్గిపుల్లల చదరాలు చిన్నది. కనుక ఆ ఆకృతి వైశాల్యం 4 అగ్గిపుల్లల చదరాలకు సమానం.



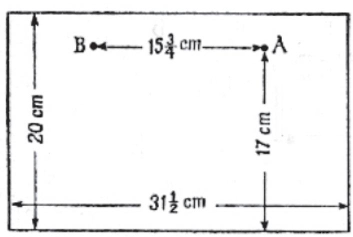
62వ బొమ్మ

71. బంధిత సమతల ఆకృతులు (closed plane figures) అన్నిటిలోకి వైశాల్యంలో వృత్తం పెద్దది అని రుజువు చెయ్యవచ్చు. కాని, అగ్గిపుల్లలతో వృత్తం తయారుచేయలేము కదా? కాని, 8 అగ్గిపుల్లలతో 63వ బొమ్మలో చూపిన ఆకృతి తయారు చేయవచ్చు. ఇది వృత్తానికి చాలా దగ్గరలోకి వస్తుంది. దీనిని సమ అష్టభుజి అంటారు. మనకు కావలసిన ఆకృతి ఇదే. ఏమంటే, అత్యధిక వైశాల్యం గలది ఇదే.

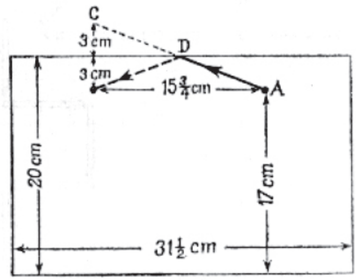


63వ బొమ్మ

72. ఈ సమస్యని సాధించడానికి సిలిండరును నిలువుగా చీరి, విడదీసి, నేల మీద పరిచినట్లు ఊహించుకుందాం. అప్పుడు అది 64వ బొమ్మలో చూపినట్లు దీర్ఘచతురస్రం అవుతుంది. దాని వెడల్పు 20 సెం.మీ. దాని పొడవు పరిధికి సమానం. అంటే, $10 \times 3\frac{1}{7}$ = 3.15 సెం.మీ. (సుమారుగా). ఈ దీర్ఘచతుస్రం మీద ఈగ ఉన్న చోటునీ, తేనె బొట్టు వున్న చోటునీ గుర్తులు పెడదాం. ఈగ A అనే బిందువు దగ్గర పీఠం నుంచి 17 సెం.మీ. దూరంలోనూ, తేనెబొట్టు B అనే బిందువు దగ్గర, A అనే బిందువుకి అర్ధ పరిధి దూరంలో, అంటే, $15\frac{3}{4}$ సెం.మీ. దూరంలో ఉంటుంది.



64వ బొమ్మ



65వ బొమ్మ

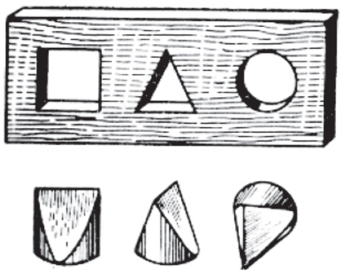
ఈగ సిలిండరు లోపలికి దూరవలసిన బిందువును తెలుసుకోవడానికి ఇలా చెయ్యాలి (65వ బొమ్మ). B అనే బిందువు నుంచి పై పీఠానికి లంబంగా ఒక సరళరేఖ గీసి, దానిని మరో అంత దూరం పైకి పొడిగించాలి. ఆ బిందువును C అనుకుందాం. A నుంచి C కి ఒక సరళరేఖ గీయాలి. ఈ సరళరేఖపై పీఠాన్ని ఖండించే బిందువును D అనుకుందాం. ఈ D అనే బిందువు దగ్గర ఈగ సిలిండరులోకి పాకాలి. ADB అనేది అత్యంత సమీప మార్గం.

66వ బొమ్మ

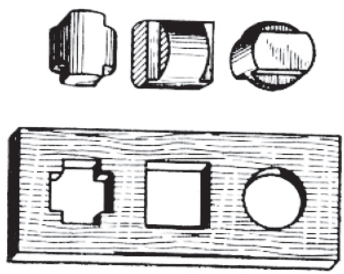
సమతల దీర్ఘ చతురస్రం మీద అత్యంత సమీప మార్గాన్ని కనుగొన్నాక, దీనిని మళ్ళీ చుట్ట చుట్టేసి, సిలిండరుగా మార్చి చూస్తే తేనె బొట్టును చేరుకోడానికి ఈగ నడపవలసిన మార్గం (66వ బొమ్మ) తెలుస్తుంది.

ఇటువంటి పరిస్థితిలో ఈగలు నిజంగా ఈ దారిలోనే వెడతాయో లేదో నాకు తెలియదు. వాసన బాగా గ్రహించగల ఈగలు దగ్గర దారిలోనే ప్రయాణం చేయవచ్చు. కాని, దగ్గర దారి తెలుసుకోడానికి మంచి ముక్కు ఒక్కటే చాలదు. క్షేత్ర గణితం బాగా తెలియాలి.

73. అటువంటి ప్లగ్గు 67వ బొమ్మలో చూపబడింది. అది చదరంగానూ, ముక్కోణం గానూ, గుండ్రంగానూ ఉన్న మూడు రకాల రంధ్రాలనూ మూయడానికి పనికి వస్తుంది.

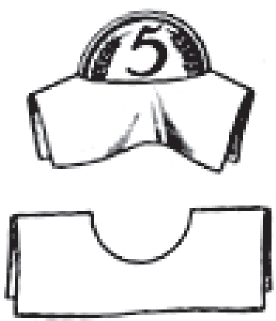


67వ బొమ్మ



68వ బొమ్మ

69వ బొమ్మ



70వ బొమ్మ

74. 68వ బొమ్మలో మూడు రకాల రంధ్రాలనూ మూయడానికి తగిన ప్లగ్గు చూపబడింది.

75. 69వ బొమ్మలో అటువంటి ప్లగ్గు చూపబడింది.

76. విచిత్రంగా కనిపించవచ్చును గానీ, 5 కోపెక్కుల నాణాన్ని అంతకన్న చిన్న రంధ్రంలోంచి దూర్చడం సాధ్యమే. కాగితాన్ని మడిచి, గుండ్రటి రంధ్రాన్ని సాగదీసి, పొడుగుపాటి నెరదలాగ చేసి (70వ బొమ్మ). ఆ నెరదలో నుంచి 5 కోపెక్కుల నాణెం దూర్చవచ్చు.

క్షేత్ర గణితం ఉపయోగించి చూస్తే ఈ కనికట్టు విడిపోతుంది. 2 కోపెక్కుల నాణెపు వ్యాసం 18 మి.మీ. దాని చుట్టుకొలత 56 మి.మీ. కన్న కొంచెం అధికం. కనుక ఆ నెరద పొడవు ఇందులో సగం లేదా 28 మి.మీ. కనుక, ఇందులో నుంచి 25 మి.మీ. వ్యాసం గల 5 కోపెక్కుల నాణెం (దాని మందం 1.5 మి.మీ. అయినా సరే) దూరిపోతుంది.

77. ఒంటి స్తంభం ఎత్తు తెలుసుకోవాలంటే ఫొటోగ్రాఫులోని స్తంభం తాలూకు ఎత్తు, పీఠము నిడివి జాగ్రత్తగా కొలవాలి. ఉదాహరణకి, ఎత్తు 95 మి.మీ. పీఠం 19 మి.మీ. ఉన్నాయి అనుకుందాం. ఆ తరువాత స్తంభం దగ్గరకు వెళ్ళి దాని పీఠం తాలూకు వ్యాసం కొలవాలి. అది 14 మీటర్లు ఉంది అనుకుందాం.

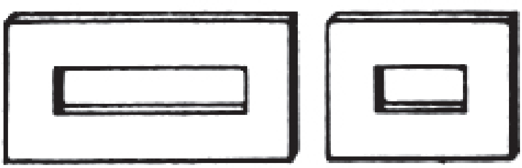
క్షేత్ర గణితం ప్రకారం ఫొటోగ్రాఫులోని స్తంభము, నిజమైన స్తంభము పరస్పరమూ సమానములు. అంటే, ఫొటోగ్రాఫులోని స్తంభం తాలూకు ఎత్తు ÷ పీఠము = అసలు స్తంభము తాలూకు ఎత్తు ÷ పీఠము అన్నమాట. ఫొటోగ్రాఫులో ఈ నిష్పత్తి 95÷ 19=5 రెట్లు. కనుక, అసలు స్తంభం ఎత్తు : 5 × 14 = 70 మీటర్లు.

కాని, ఇందులో ఒక చిన్న లొసుగు ఉంది. ఈ విధంగా ఎత్తు తెలుసుకోవాలంటే ఫొటోగ్రాఫు సరి అయినది అయి వుండాలి. చేతకానివాళ్ళు తీసే రకం హెచ్చు తగ్గుల ఫొటో పనికి రాదు.

78. ఈ ప్రశ్నలు రెండింటికీ సాధారణంగా అవును అనే సమాధానమే వినిపిస్తూ ఉంటుంది. కాని, నిజానికి త్రిభుజములు మాత్రమే సమానములు. బొమ్మ యొక్క ఫ్రేము తాలూకు వెలుపలి, లోపలి దీర్ఘ చతురస్రములు సమానములు కావు. త్రిభుజముల విషయంలో రెండింటి సంగత కోణములు (corresponding angles) సమానములు అయితే చాలు, ఆ త్రిభుజములు సమానములు అవుతాయి. (భుజములు సమాంతరంగా ఉంటే కోణములు సమానములే). కాని, మూడు కన్న ఎక్కువ భుజములు గల బహు భుజుల (polygons) విషయంలో ఈ రూలు పనికిరాదు. కోణ సమానత్వం – అంటే భుజములు సమాంతరంగా ఉంటే సరిపోదు. భుజములు అనుపాతములు (proportional) అయి ఉండాలి. పటముల ఫ్రేములు చతురస్రములు (లేదా సమ చతుర్భుజములు – rhombi) అయినప్పుడు మాత్రమే ఇది సరిపోతుంది. దీర్ఘ చతురస్రాకారపు ఫ్రేములు అయితే సమానత్వం లేదు.

71వ బొమ్మలో చూపించినట్లు దళసరి ఫ్రేము గల దీర్ఘచతురస్రపు పటముల విషయంలో ఈ "అతుల్యత్వం" కొట్టవచ్చినట్లు కనిపిస్తుంది. ఎడమ వైపు బొమ్మలో ఫ్రేము వెలుపలి భుజములు 2 : 1 నిష్పత్తిలోనూ, లోపలి భుజమలు 4 : 1 నిష్పత్తిలోనూ ఉన్నాయి. కుడివైపు బొమ్మలో అవి 4 : 3; 2 : 1 నిష్పత్తిలోనూ ఉన్నాయి.

ఈ సమస్యకి సమాధానం చెప్పగలగడానికి ఖగోళశాస్త్ర పరిచయం అవసరం అంటే చాలామంది ఆశ్చర్యపోతారు. భూసూర్యుల మధ్య దూరమూ, సూర్యబింబ వ్యాసమూ మనకు అవసరం.



71వ బొమ్మ

72వ బొమ్మ

తీగముక్క ఏర్పరచే పరిపూర్ణ ఛాయ పొడవు 72వ బొమ్మలో చూపించిన క్షేత్ర గణిత ఆకృతి వల్ల నిర్ణయింపబడింది :

$$\frac{\text{భూసూర్యుల మధ్య దూరము}}{\text{సూర్యబింబ వ్యాసము}} = \frac{\text{తీగముక్క పరిపూర్ణ ఛాయ పొడవు}}{\text{తీగ వ్యాసము}}$$

అనే సమీకరణం అర్థం అయింది కదా?

భూసూర్యుల మధ్య దూరము = 150 000 000 కి.మీ.

సూర్యబింబ వ్యాసము : 1 400 000 కి.మీ.

ఈ రెంటి నిష్పత్తి = 115కి సమానం.

కనుక పరిపూర్ణఛాయ పొడవు :

$4 \times 115 = 460$ మి.మీ., లేదా 46 సెం.మీ.

ఈ పొడవు ఇంత తక్కువ కనుకనే మనకు నేల మీద గాని, గోడల మీద గాని తీగల పరిపూర్ణ ఛాయలు కనబడవు. అలుక్కుపోయినట్లు కనిపించే నీడలు ఉపచ్ఛాయలు (penumbra) మాత్రమే.

8వ సమస్య ఇంచుమించు ఇటువంటిదే.

80. చిన్న ఇటుక బరువు 1 కిలోగ్రాము ఉంటుందని మీరు అనుకుంటే అది తప్పు. చిన్న ఇటుక పొడవు పెద్ద ఇటుకతో పోల్చితే 4వ వంతు ఉంటుంది. సరే కాని, దాని వెడల్పు, మందమూ కూడా నాలుగో వంతే కదా? కనుక, చిన్న ఇటుక ఘనపరిమాణము $4 \times 4 \times 4 = 64$ రెట్లు తక్కువ. కనుక, బరువు కూడా 64 రెట్లు తక్కువే.

$4000 \div 64 = 62.5$ గ్రాములు.

81. ఇది కూడా పై సమస్య వంటిదే కనుక, ఎలా చెయ్యాలో మీకు ఈపాటికి తెలిసే ఉంటుంది. మానవ శరీరాలు ఇంచుమించు తుల్యాకృతులలోనే ఉంటాయి కనుక, రెట్టింపు పొడుగున్న వాటి బరువు రెట్టింపు కాదు, 8 రెట్లు ఉంటుంది.

ప్రపంచం అంతలో ఎక్కువ పొడవు అయినవాడు 2.7 మీటర్ల పొడవున్న "ఆల్సేషియన్" జాతికి చెందిన ఆసామీ. ఇతడు సామాన్య మానవుడి కన్న ఒక మీటరు

అధికం. ప్రపంచం అంతలోకీ పొట్టివాడు 40 సెం.మీ. పొడవున్న ఒక మరుగుజ్జు అట. సుమారుగా ఆ మరుగుజ్జు కన్నా ఆల్సేషియన్ 7 రెట్లు ఎక్కువ పొడవు. కాటాలో, ఒక సిబ్బిలో ఆల్సేషియన్‌ని నిలుచోబెట్టి, రెండో సిబ్బిలో ఆ రకం మరుగుజ్జులను ఉంచి సరితూగించాలంటే $7 \times 7 \times 7 = 343$ మంది మరుగుజ్జులు అవసరం.

82. చిన్న పుచ్చకాయ కన్న పెద్దది $1\frac{1}{4} \times 1\frac{1}{4} \times 1\frac{1}{4} = \frac{125}{64}$ రెట్లు, అంటే సుమారు రెట్టింపు ఘనపరిమాణం కలది అన్నమాట. రెట్టింపు గుజ్జుకి ఒకటిన్నర రెట్లు ధర ఇచ్చి పెద్ద కాయ కొనడమే మేలు.

అయితే, పుచ్చకాయలు అమ్మేవాడు రెట్టింపు బరువున్న కాయకి ఒకటిన్నర రెట్లు మాత్రమే ధర ఎందుకు చెప్తాడు? ఏముందీ? ఈ అమ్మేవాళ్ళకు క్షేత్ర గణితం రాదు. అందుకనే లాభసాటి బేరాలు చేజేతులారా జారవిడిచేస్తూ ఉంటారు. చిన్న పుచ్చకాయల కన్న పెద్దవి కొనడమే ముమ్మాటికీ లాభం. ఏమంటే సర్వసాధారణంగా పెద్ద కాయల ధర ఉండవలసిన దానికన్నా తక్కువగా ఉంటూ ఉంటుంది. కాని, ఈ సంగతి కొనేవారిలో చాలామందికి తెలియదు.

సరిగ్గా ఈ కారణం చేతనే చిన్న కోడిగుడ్ల కన్న పెద్ద కోడిగుడ్లు కొనడమే లాభం (వాటిని తూచి అమ్మితే తప్ప).

83. గోళాకారపు వస్తువుల చుట్టు కొలతల నిష్పత్తి వాటి వ్యాసముల నిష్పత్తికి సమానం. కనుక 60 సెం.మీ. 50 సెం.మీ. చుట్టు కొలతలు గల ఆ కాయల వ్యాసములు $60 \div 50 = 6/5$ నిష్పత్తిలో ఉంటాయి. కనుక వాటి ఘనపరిమాణముల నిష్పత్తి :

$$\frac{6}{5} \times \frac{6}{5} \times \frac{6}{5} = \frac{216}{125} \approx 1.73$$

కనుక పెద్ద పుచ్చకాయ ధర చిన్నదానికి 1.73 రెట్లు ఉండాలి (ఘన పరిమాణముల ప్రకారం ధర నిర్ణయిస్తే). కానీ, వాటిని అమ్మేవాడు 50 శాతం మాత్రమే ఎక్కువ అడుగుతున్నాడు. కనుక పెద్దది కొనడమే లాభం.

84. రేగుపండు వ్యాసం గింజకు మూడు రెట్లు అని తెలుస్తూనే వుంది. కనుక పండు ఘనపరిమాణం గింజకి $3 \times 3 \times 3 = 27$ రెట్లు. అంటే గింజ 1/27వ వంతు, గుజ్జు 26/27వ వంతు ఆక్రమిస్తాయి లేదా గింజ కన్న గుజ్జు 26 రెట్లు అధికం.

85. ఐఫెల్ టవర్ తాలూకు నమూనా అసలు టవర్ కన్న 8 000 000 రెట్లు తేలికగా ఉండాలి. రెండూ ఒకే పదార్థంతో చేయబడ్డాయి కనుక నమూనా

ఘనపరిమాణం కూడా 8 000 000వ వంతు ఉండాలి. తుల్యాకృతులు గల వస్తువుల ఘనపరిమాణముల నిష్పత్తి, ఆ వస్తువుల ఎత్తుల ఘనముల నిష్పత్తికి సమానం అని మనం తెలుసుకున్నాం. 8 000 000కి ఘనమూలం 200 కనుక (అంటే, 200 × 200 × 200 = 8 000 000 ఆ నమూనా ఎత్తు 200వ వంతు ఉండాలి. అసలు టవరు ఎత్తు 300 మీటర్లు కనుక, నమూనా ఎత్తు 300 మీటర్లు కనుక, నమూనా ఎత్తు :

300 ÷ 200 = 1.5 మీటర్లు

కనుక నమూనా సుమారు మనిషి ఎత్తు ఉంటుంది.

86. పాత్రలు రెండూ ఒకదానికొకటి తుల్యములు. వాటి ఘనపరిమాణముల నిష్పత్తి 8 కనుక, నిలువు కొలతల నిష్పత్తి 2 అయి వుండాలి. (2 × 2 × 2 = 8 కనుక). అనుక ఉపరితల వైశాల్యముల నిష్పత్తి 2 × 2 = 4 అవాలి (ఏమంటే వైశాల్యం నిలువు కొలతకి వర్గం కనుక). ఆ పాత్రల గోడల మందములు సమానం కనుక, పాత్ర బరువు ఉపరితల వైశాల్యం బట్టి ఉంటుంది. కనుక పెద్ద పాత్ర బరువు చిన్నదానికి 4 రెట్లు.

87. మొదటిసారిగా చూస్తే ఈ సమస్య గణితానికి సంబంధించినది కాదనిపిస్తుంది. కాని, క్రిందటి సమస్యలాగే దీనిని కూడా క్షేత్రగణిత సహాయంతో సాధించవచ్చు.

ఈ సమస్యని సాధించే ముందు, ఇటువంటిదే మరో సులభతరమైన సమస్యని పరిశీలిద్దాం.

ఒకే ఆకారంలో, ఒకే లోహంతో, ఒకే విధంగా చేసిన రెండు బాయిలర్లు ఒకటి పెద్దదీ, మరొకటి చిన్నదీ ఉన్నాయనుకుందాం. వాటిని మరిగే నీళ్ళతో నింపారనుకుందాం. వాటిలో ఏ బాయిలరులో నీళ్ళు త్వరగా చల్లారుతాయి?

వస్తువుల ఉపరితలం నుంచి వేడి బయటికి పోతుంది. కనుక, ప్రతి యూనిట్ ఘనపరిమాణానికీ ఎక్కువ ఘనపరిమాణం దేనికి ఉందో అందులోని ద్రవం త్వరగా చల్లారిపోతుంది. ఒక బాయిలరు రెండవ దానికన్నా n రెట్లు ఎత్తు, n రెట్లు వెడల్పు ఉన్నట్లయితే దాని ఉపరితలం చిన్నదాని ఉపరితలం కన్నా n^2 రెట్లు, ఘనపరిమాణం n^3 రెట్లు అధికం. పెద్ద బాయిలరులో ప్రతి యూనిట్ ఉపరితలానికీ n రెట్లు ఎక్కువ ఘనపరిమాణం ఉంది కనుక, చిన్న బాయిలరులో నీళ్ళు త్వరగా చల్లారిపోతాయి.

సరిగ్గా ఈ కారణం చేతనే చలికాలంలో నడివీధిలో నిలుచున్న పెద్దవాడి కన్న అదే విధమైన దుస్తులు తొడుక్కున్న చిన్నవాడికి ఎక్కువ చలి వేస్తుంది. ఇద్దరి శరీరాలలోనూ ఒక్కొక్క ఘనపు సెంటీమీటరులో నిక్షిప్తమై ఉన్న వేడి సమానమే. కాని, ప్రతి ఘనపు సెం.మీ. శరీర భాగానికీ ఉపరితల వైశాల్యం చిన్న పిల్లవాడికి పెద్దవారిలో కన్న ఎక్కువ. కనుక చిన్నవాడి శరీరంలో నుంచి ఎక్కువ వేడి బయటికి పోతూ ఉంటుంది.

సరిగ్గా ఈ కారణం చేతనే శీతల దేశాలలో ముక్కు, చెవులు, వేళ్ళు చలికి ఎక్కువ బాధపడతాయి. అక్కడ ఘనపరిమాణంతో పోల్చితే ఉపరితల వైశాల్యం శరీరంలోని ఇతర భాగాలలో కన్న అధికం.

పెద్ద దుంగ కన్న, అందులో నుంచి నరికిన చిన్న చిన్న కర్ర ముక్కలు త్వరగా అంటుకుని మండటానికి కూడా సరిగ్గా ఇదే కారణం.

వేడి ఉపరితలం నుంచి అంతర్భాగానికి చేరాలి. కనుక చిన్న కర్ర ముక్క యొక్క ఉపరితల వైశాల్య ఘనపరిమాణముల నిష్పత్తిలో పెద్ద దుంగ యొక్క అదే నిష్పత్తిని పోల్చాలి. చిన్న కర్ర ముక్క కన్న పెద్ద దుంగ పది రెట్లు లావు, పది రెట్లు పొడవు ఉన్నట్లయితే దాని ఉపరితల వైశాల్యం 100 రెట్లు అధికం ; ఘనపరిమాణం 1000 రెట్లు అధికం కనుక ప్రతి యూనిట్ ఉపరితల వైశాల్యానికీ చిన్న ముక్కలో, దుంగలో కన్నా 10వ వంతు మాత్రమే ఘనపరిమాణం ఉంది. అంటే ఒక వేడి పది రెట్లు చిన్నగా ఉన్న కర్ర భాగాన్ని మండించాలి. కనుక చిన్న కర్ర ముక్క త్వరగా అంటుకుంటుంది (కర్ర మంచి ఉష్ణవాహకం కాదు కనుక ఈ పోలికలు ఉజ్జాయింపుగా మాత్రమే పరిగణించాలి).

9వ ప్రకరణం

హిమ వర్షాలలో క్షేత్ర గణితం

88. వర్షమానిని

రష్యాలో, లెనిన్‌గ్రాడ్‌లో వర్షాలు ఎక్కువగా కురుస్తాయని (ఉదాహరణకి, మాస్కోలో కన్నా చాలా ఎక్కువగా) జనం అంటూ ఉంటారు. కాని, శాస్త్రజ్ఞులు ఈ మాటని అంగీకరించరు. లెనిన్‌గ్రాడ్‌లో కన్నా మాస్కోలోనే వర్షపాతం ఎక్కువని వారు అంటారు. వాళ్ళకి ఆ సంగతి ఎలా తెలుసు? వర్షాన్ని కొలిచే పద్ధతి ఏమైనా ఉందా?

ఈ పని చాలా కష్టం అనిపిస్తుంది చాలామందికి. కాని, దానిని మీరు స్వయంగా కొలవవచ్చు. నేల మీద పడ్డ వర్షపు చినుకులన్నీ పట్టుకుని కొలవాలేమోనని భయపడకండి. నేల మీద పడ్డ వర్షం ప్రక్కలకి ప్రవహించడం కాని, నేలలోకి ఇంకిపోవడం కాని జరగని పక్షంలో ఎంత "లోతు" వాన నీరు పడుతుందో కొలిస్తే చాలు. ఆ పని చేయడం కష్టం కాదు.

వర్షం కురుస్తున్నప్పుడు ఆ ప్రదేశమంతటా సరిసమానంగా కురుస్తుంది. అంతేకాని, ఒక ప్రదేశంలో ఎక్కువ వర్షమూ, ఆ పక్క పొలంలో తక్కువ వర్షమూ పడదు. కనుక, వాననీటి "లోతు" ఒక్క చోట కొలిస్తే, వాన కురిసిన ప్రదేశమంతటా అదే లోతు నిశ్చయించవచ్చు. ఈ పాటికి మీకు అర్థం అయే వుంటుంది వాన నీటిని కొలిచే పద్ధతి ఏమిటో. దానికి చేయవలసిందల్లా మూతలేని సీసానో, గ్లాసునో, బాల్చీనో ఉపయోగించడం. గోడలు నిట్టనిలువుగా ఉండే పాత్ర (సిలిండరు ఆకారంలో ఉండేది) ఉంటే దానిని వానలో పెట్టు.* వాన వెలిశాక ఆ పాత్రలో ఉన్న నీటి లోతును కొలు. అంతే. లెక్క కట్టడానికి కావలసిన సరంజామా అంతా అమరినట్లే.

---

* నేల మీద పడ్డ చినుకులు చింది మళ్ళీ పాత్రలో పడకుండా ఉండటం కోసం పాత్రను సాధ్యమైనంత ఎత్తులో పెట్టడం అవసరం.

మన ఇంట్లో చేసుకున్న ఈ వర్షమానిని (pluviometer) ఎలా పనిచేస్తుందో చూద్దాం. ఆ పాత్రలో పడిన వర్షపు నీటికి కొలవడం ఎలాగ? స్కేలు ఉపయోగించా? పాత్రలో చాలా వర్షపు నీరు పడ్డట్లయితే స్కేలు ఉపయోగించి కొలవవచ్చు. కాని, సాధారణంగా 2.3 సెం.మీ. లేదా ఒక్కొక్కప్పుడు కొద్ది మి.మీ. లోతు మాత్రమే ఉండవచ్చు. అటువంటప్పుడు స్కేలు ఉపయోగించి కొలిస్తే కొలతలు ఖచ్చితంగా ఉండవు. మన లెక్కకి ప్రతి మిల్లీ మీటరూ – ఇంకా మాట్లాడితే మిల్లీమీటరులోని భిన్నాంకములు కూడా ఖచ్చితంగా కొలవడం అవసరమే. మరి అయితే ఏం చెయ్యాలి?

బాల్చీలో పడిన వాన నీటిని సన్నని పొడుగుపాటి మరో గాజు పాత్రలో పోయాలి. ఆ పాత్రలో నీటి మట్టం చాలా ఎత్తులో ఉంటుంది. ఈ సన్నని గాజు పాత్ర బయటనుంచే స్కేలుతో లోతు కొలవవచ్చు. ఇక్కడ ఒక ముఖ్యమైన సంగతి జ్ఞాపకం పెట్టుకోవాలి. మనకు నిజంగా కావలసింది సన్నని పాత్రలోని నీటి లోతు కాదు. కాని, ఈ లోతు తెలిస్తే అసలు బాల్చీలోని నీటి లోతు లెక్క వెయ్యవచ్చు. బాల్చీ మట్టం కన్న సన్నని పాత్ర మట్టం వ్యాసం 10 ఇంతలు తక్కువ అనుకుందాం. అప్పుడు ఆ మట్టు వైశాల్యం 10×10=100 ఇంతలు తక్కువ. కనుక సన్నని గాజు పాత్రలోని నీటి లోతు బాల్చీలోని నీటి లోతుకి 100 రెట్లు అధికంగా వుంటుంది. కనుక బాల్చీలో 2 మి.మీ. లోతు వాన నీరు ఉంటే, సన్నని పాత్రలో 200 మి.మీ. లోతున (లేదా 20 సెం.మీ) ఉంటుంది.

దీనిని బట్టి బాల్చీ కన్న కొలిచే గాజు పాత్ర మట్టం మరీ సన్నంగా ఉండకూడదని తెలుస్తోంది కదా. అలా అయితే గాజు కొలపాత్ర చాలా పొడుగైనది అవసరం అవుతుంది. 5 రెట్లు సన్నని కొలపాత్ర ఉంటే బాగా సరిపోతుంది. అప్పుడు దాని మట్టం వైశాల్యం బాల్చీ మట్టం వైశాల్యంలో 25వ వంతు ఉంటుంది. కనుక నీటి లోతు 25 రెట్లు ఉంటుంది. అంటే బాల్చీలో నీటి లోతు 1 మి.మీ. అయితే సన్నని కొలపాత్రలో లోతు 25 మి.మీ. ఉంటుంది. కొల పాత్ర తాలూకు గోడ వెలుపల ఒక కాగితం అతికించి, దానిమీద 25 మి.మీ. భాగాలుగా విభజించు. వాటికి 1, 2, 3.... అని అంకెలు వెయ్యి. అప్పుడు కొలపాత్రలోని నీటి మట్టం చూసి బాల్చీలో నీటి మట్టం ఎంతో లెక్కలు వెయ్యకుండానే వెంటనే చెప్పెయ్యవచ్చు. కొలపాత్ర వ్యాసం 5వ వంతు కాక 4వ వంతు అయితే అప్పుడు అతికించిన కాగితం మీద16 మి.మీ. భాగాలను చేసి, 1, 2, 3 .... అని రాయాలి.

అన్నట్టు, బాల్చీలోని నీటిని సన్నని కొలపాత్రలోకి వంచడం చాలా కష్టమైన పని. దీనికో ఉపాయం ఉంది. బాల్చీ మట్టం దగ్గర కన్నం పొడిచి, కుళాయిలాగ అమర్చితే, బాల్చీని ఎత్తి వంచనక్కర లేకుండానే కొలపాత్రలోకి సునాయాసంగా నీటిని మార్చవచ్చు.

వాన నీటి లోతు కొలవడానికి అవసరమైన పనిముట్టు తయారైంది. ఇంట్లో తయారు చేసుకున్న ఈ వర్షమానిని మెటియరాలజీ డిపార్ట్‌మెంట్‌వారు ఉపయోగించే పనిముట్లంత ఖచ్చితంగా ఉండకపోవచ్చు గాని, చవకగా, సింపులుగా ఉండే మన వర్షమానినితో చాలా ఉపయోగకరమైన లెక్కలు వెయ్యవచ్చు.

అటువంటి లెక్కలు కొన్ని ఇక్కడ చూపిస్తున్నాను.

89. ఎంత వాన కురిసింది

మీ ఇంటి వెనుక 40 మీటర్ల పొడవు, 24 మీటర్ల వెడల్పు ఉన్న పెరడు ఉందనుకో. వర్షం కురిసి కురిసి ఇప్పుడే వెలిసింది. మీ పెరట్లో మొత్తం ఎంత వాన కురిసిందో తెలుసుకోవాలని మీకు ఉందా?

ఎలా లెక్కకట్టడం?

వాన నీటి "లోతు" ముందర తెలుసుకోవాలి. అది తెలియనిదే ఏ పనీ కాదు. మనం తయారు చేసుకున్న వర్షమానిని 4 మి.మీ. వాన పడింది అని చెప్తోంది అనుకో. ఒక్కొక్క చదరపు మీటరు స్థలంలో ఎన్ని ఘనపు సెం.మీ. నీరు పడిందో లెక్క కట్టాలి ముందర (భూమిలోకి నీరు ఇంకిపోలేదు అనుకుంటే). ఒక చ.మీ. వెడల్పు గల స్థలం అని కదా అర్థం. ఆ స్థలంలో 4 మి.మీ. (లేదా 0.4 సెం.మీ.) లోతున వర్షం కురిసింది. అంటే,

ఘనపరిమాణం : $100 \times 100 \times 0.4 = 4000$ ఘ.సెం.మీ.

ఒక ఘ.సెం.మీ. నీటి బరువు 1 గ్రాము.

కనుక ఒక్కొక్క చ.మీ. నేల మీద 4000 గ్రాముల (లేదా 4 కి.గ్రా.) బరువైన నీరు పడింది అన్నమాట. మీ ప్రదేశం మొత్తం వైశాల్యం : $40 \times 24 = 960$ చ.మీ.

కనుక మీ ప్రదేశంలో కురిసిన మొత్తం వాన నీటి బరువు :

$4 \times 960 = 3\ 840$ కిలోగ్రాములు

అంటే, కొంచెం తక్కువగా నాలుగు టన్నులు.

సరిగ్గా ఇంత నీరు బాల్చీలతో తెచ్చి మీ ప్రదేశంలో పొయ్యాలంటే ఎన్ని బాల్చీలు అవుతాయో సరదాకి లెక్క వెయ్యవచ్చు. సామాన్యమైన బాల్చీలో సుమారు 12 కిలోగ్రాముల నీరు పడుతుంది. కనుక మొత్తం వాన నీరు 3 840 ÷ 12 = 320 బాల్చీలకు సమానం. అంటే మీ ప్రదేశంలో 15 నిమిషాలలో కురిసిన వానకి సమానం కావాలంటే 300 పై చిలుకు బాల్చీల నీరు తెచ్చి పొయ్యాలన్న మాట.

వర్షంలో తరతమ బేధాలను (తుంపర, జల్లు, జడివాన వగైరా భేదాలను) అంకెలలో సూచించడం సాధ్యమేనా? ఆ పని చెయ్యగలగాలంటే నిమిషానికి ఎన్ని మిల్లీమీటర్ల వాన పడిందో నిర్ణయించాలి. నిమిషానికి 2 మి.మీ. వాన పడితే అది చాలా పెద్ద వాన (కుండపోత) అనవచ్చు. శరత్కాలపు వాన ఒక గంటో, అంతకన్న ఎక్కువ సేపో కురిస్తే కాని ఒక మి.మీ. కాదు.

దీనిని బట్టి వాన నీటి లోతులను కొలవడం సాధ్యమే కాక, చాలా సులభం అని కూడా తెలుస్తోంది కదా? కావాలంటే ఎన్ని వాన చినుకులు పడ్డాయో కూడా లెక్క వెయ్యవచ్చు.*

మామూలుగా కురిసే వానలో ఒక గ్రాముకి సుమారుగా 12 బిందువులు (లేక చినుకులు) ఉంటాయి. కనుక పైన చెప్పిన రకం వానలో చ.మీ.కి 4 000 × 12 = 48 000 బిందువులు వుంటాయి.**

దీనిని బట్టి పెరటిలో మొత్తం ఎన్ని వాన చినుకులు పడ్డాయో లెక్కకట్టడం కష్టం ఏమీ కాదు. కాని, అటువంటి లెక్కలు సరదాకి తప్ప ఉపయోగం ఏమీ లేదు. ఈ మాట ఎందుకు చెప్పానంటే, నమ్మశక్యం కానట్లు కనిపించే లెక్కలను కూడా (ఎలా చెయ్యాలో తెలిస్తే) చేయడం సాధ్యమేనని చూపించడానికే.

---

* వాన ఎప్పుడూ బిందువుల రూపంలోనే పడుతుంది. ఏకధారగా, కుండపోతగా, ఆకాశానికి చిల్లు పడ్డట్లు, వగైరా నుడికారాలు వాడిన సమయాలలో కూడా విడి విడి బిందువుల రూపంలోనే పడుతుంది. – అనువాదకుడు.

** వాన బిందువుల సైజులు అన్నీ ఒకే విధంగా వుండవు. వాటిలో చాలా భేదాలుంటాయి. కనుక, గ్రాముకి 12 బిందువులు అనేది ఒక ప్రత్యేకమైన వానకి మాత్రమే వర్తిస్తుంది అని గ్రహించాలి. – అనువాదకుడు.

90. ఎంత మంచు పడింది

వాన నీటి లోతును కొలిచే పద్ధతి తెలుసుకున్నాం. వడగళ్ళు పడుతున్నప్పుడు ఎంత లోతు నీరు పడిందో కొలవడం ఎలాగా? ఇదివరకు చెప్పినట్లే తేడా ఏమీ లేదు. వడగళ్ళు వర్షమానినిలో పడి కరిగిపోతాయి. అప్పుడు లోతు కొలవవచ్చు.

మంచు పడినప్పుడు ఎంత లోతు నీరు పడిందో లెక్క కట్టడం ఇంత సులభం కాదు. ఏమంటే, గాలి విసురుకి బాల్చీలో పడ్డ మంచు కొంత బయటికి కొట్టుకుపోవచ్చు. కాని, మంచు నీటి లోతు కొలవడానికి వర్షమానిని అవసరమే లేదు. దొడ్లో గాని, పొలంలో గాని పడిన మంచు ఎంత లోతుందో మీటరు బద్దతో కొలవవచ్చు. అయితే ఆ మంచు కరిగి నీరు అయితే ఎంత లోతు ఉంటుందో తెలుసుకోడానికి ఒక ప్రయోగం చెయ్యాలి. బయట పడిన మంచు ఎంత వదులు వదులుగా వుందో అంతే వదులుగా మంచును బాల్చీలో నింపి, కరిగాక, ఆ నీటి లోతును కొలవాలి. దీనిని బట్టి ఒక సెం.మీ. మంచు కరిగితే ఎన్ని సెం.మీ. నీళ్ళు ఏర్పడతాయో తెలుస్తుంది. అది తెలిశాక మంచు లోతులు నీటి లోతుకి మార్చడం సులభమే కదా?

ప్రతి రోజూ విడవకుండా ఏడాది పొడుగునా కురిసిన వాన లోతును కొలిచి, దానికి శీతాకాలంలో కురిసిన మంచు లోతును కూడా నీటి లోతుగా మార్చి కలిపితే, మొత్తం మీద మీ ప్రాంతంలో ఏడాదిలో కురిసిన నీటి మొత్తం లోతు తెలుస్తుంది.

సోవియట్ యూనియన్‌లోని వివిధ ప్రదేశాలలో సగటున ఏడాదికి ఎంత లోతు నీరు కురిసిందో ఈ క్రింద చూపించాను :

లెనిన్‌గ్రాడ్	47 సెం.మీ.	కుతయ్‌సి	179 సెం.మీ.
వొలొగ్ద	45 సెం.మీ.		
అర్ఖాంగెల్‌స్క్	41 సెం.మీ.	బకు	24 సెం.మీ.
మాస్కో	55 సెం.మీ.	స్వెర్ద్‌లొవ్‌స్క్	36 సెం.మీ.
కొస్త్రొమ	49 సెం.మీ.	సెమిపలతిన్‌స్క్	21 సెం.మీ.
కజాన్	44 సెం.మీ.	అల్మ – అత	51 సెం.మీ.
కుయ్‌బిషెన్	39 సెం.మీ.	తష్కెంత్	31 సెం.మీ.
ఒరెన్‌బుర్గ్	43 సెం.మీ.	యెనిసెయ్‌స్క్	39 సెం.మీ.
ఒదెస్స	40 సెం.మీ.	ఇర్కుత్‌స్క్	44 సెం.మీ.
అస్త్రహన్	14 సెం.మీ.		

ఈ ప్రదేశాలన్నిటిలోనూ కుతయ్‌సిలో అత్యధిక పాతము (179 సెం.మీ.), అస్త్రహన్‌లో అత్యల్ప పాతము (14 సెం.మీ., అంటే కుతయ్‌సిలో 13వ వంతు) కనబడుతున్నాయి. కుతయ్‌సిలో కన్న చాలా ఎక్కువ పాతము గల చోట్లు ప్రపంచంలో ఉన్నాయి. ఉదాహరణకి, భారతదేశంలో ఒక ప్రదేశం ఉంది.* ఆ ప్రదేశం వాన నీటిలో ఇంచుమించు మునిగి పోతుందని చెప్పవచ్చు. అక్కడ ఏడాదికి 1260 సెం.మీ. లోతు వర్షం కురుస్తుంది. అంటే, పన్నెండున్నర మీటర్లు అన్నమాట! అక్కడ ఒకసారి ఒక్క రోజులో 100 సెం.మీ. వాన కురిసిందట. అలాగే అస్త్రహన్‌లో కన్నా చాలా స్వల్ప వర్షం కురిసే చోట్లు కూడా ప్రపంచంలో ఉన్నాయి. ఉదాహరణకి చిలీలో ఏడాదికి 1 సెం.మీ. కన్న తక్కువ పాతం కనబడుతుంది.

ఏడాదికి 25 సెం.మీ. కన్న తక్కువ వానపడే ప్రదేశాలను అల్పవృష్టి ప్రదేశాలని పిలవవచ్చు. అక్కడ కృత్రిమమైన నీటి పారుదల పథకాలు లేకుండా వ్యవసాయం కొనసాగదు.

ప్రపంచంలో వివిధ ప్రాంతాలలో ఏడాదికి ఎంత వాన పడుతుందో కొలిచి తెలుసుకున్నాక భూగోళం మొత్తం మీద ఏడాదికి సగటున ఎంత వాన పడుతుందో లెక్కకట్టడం కష్టం ఏమీ కాదు. ఏడాదికి సగటున నేల మీద 78 సెం.మీ. వాన కురుస్తుంది. సముద్రాల మీద కూడా సుమారుగా నేల మీద పడినంత వానే పడుతుందని అంటారు. ఇంతవరకూ తెలిశాక మొత్తం భూగోళం మీద ఏడాదికి సగటు పాతం – వాన, వడగళ్ళు, మంచు వగైరాలన్నీ కలిపితే లెక్క కట్టడం తేలికే. దీనికి భూమి యొక్క ఉపరితల వైశాల్యం తెలియాలి. అది నీకు తెలియకపోతే ఎలా గుణించాలో ఇక్కడ చూపిస్తాను.

భూగోళపు చుట్టుకొలతలో 4 కోట్లవ వంతు ఒక మీటరుకి సరిగ్గా సమానం. అంటే భూమి చుట్టుకొలత 40 000 000 మీ. లేదా 40 000 కి.మీ. భూమి వ్యాసం చుట్టుకొలతలో $3\frac{1}{7}$వ వంతు. దీనిని బట్టి వ్యాసం: $40\,000 \div 3\frac{1}{7} \approx 12\,700$ కి.మీ.

భూవ్యాసము × భూవ్యాసము × $3\frac{1}{7}$ = భూమి ఉపరితల వైశాల్యం ఇది :

$12\,700 \times 12\,700 \times 3\frac{1}{7} \approx 509\,000\,000$ కి.మీ.

* ఆ ప్రదేశం చిరపుంజి – అనువాదకుడు.

(ఎడమ నుంచి నాలుగవ అంకె, ఆ తరువాతి అంకెలు సున్నాలు వేయడానికి కారణం అవి అంత ఖచ్చితంగా తెలియకపోవడమే. ఇది ఉజ్జాయింపు).

కనుక, భూమి వైశాల్యం 509 మిలియన్ చ.కి.మీ. మళ్ళీ మన వాన సమస్యలోకి వద్దాం. ముందు ఒక చ.కి.మీ. స్థలంలో ఎంత వాన పడుతుందో చూద్దాం. ఒక చ.కి.మీ. లేదా 10 000 చ.సెం.మీకి 78 × 10 000 = 780 000 ఘనపు సెం.మీ.

ఒక చ.కి.మీ.లో 1 000 × 1 000 = 1 000 000 చ.మీ. కనుక, ఒక చ.కి.మీ. స్థలంలో పడే వాన 780 000 000 000 ఘ.సెం.మీ. లేదా 780 000 ఘ.మీ.

ఇది మొత్తం భూమి వైశాల్యానికి 397×10^{12} ఘ.మీ. లేదా 397 000 ఘ.కి.మీ. అవుతుంది.

కనుక ఏడాదికి భూగోళం అంతటి మీదా పడే సగటు వర్షపాతం సుమారుగా నాలుగు లక్షల ఘనపు కిలోమీటర్లు.

ఇంతటితో మంచు, వానల క్షేత్ర గణితాలకు సంబంధించిన ఆలోచనలు కట్టిపెడదాం. ఇంతకన్న వివరాలు కావలసినవారు మెటియరాలజీ పుస్తకాలలో చూసుకోవచ్చు.

10వ ప్రకరణం

ప్రళయ గణితం

91. మహా ప్రళయం

ఒకప్పుడు నిర్విరామంగా కురిసిన వానల వల్ల మహా ప్రళయం వచ్చి, ఉన్నత పర్వత శిఖరాలు కూడా మునిగిపోయిన సంగతి బైబిలులో రాసి ఉంది. భూమి మీద మానవుణ్ణి సృష్టించిన తప్పుకి పశ్చాత్తాపపడిన దేవుడు ఈ ప్రళయాన్ని సృష్టించాడట.

“నేను సృష్టించిన మానవులను, జంతువులను, పక్షులను, కీటకాలను అన్నింటినీ ఈ భూమి మీద లేకుండా నాశనం చేసేస్తాను” అన్నాడు దేవుడు.

కాని, ఒకే ఒక మనిషిని మాత్రం చంపకుండా ఉంచదలచాడు దేవుడు. అతడే నోవా. రాబోయే మహా ప్రళయాన్ని గురించి ముందుగానే అతడికి తెలియజేశాడు దేవుడు. 300 క్యూబిట్ల పొడవు, 50 క్యూబిట్ల వెడల్పు, 30 క్యూబిట్ల ఎత్తు గల ఓడ తయారు చేసి ఉంచుకోవలసిందని ఆదేశించాడు. ఆ ఓడలోమూడు అంతస్తులు ఉండాలి. అందులో నోవా అతని కుటుంబమూ, అతని పిల్లల కుటుంబాలే కాక భూమి మీది అన్ని రకాల జీవులనూ, రకానికి ఒక్కొక్క జంట చొప్పున ఈ ఓడలో ఉంచి రక్షించాలి. చాలాకాలం పాటు వాటికన్నిటికీ సరిపోయేటంత మేత కూడా ఓడలో జాగ్రత్త చెయ్యాలి.

భూమి మీది సకల జీవరాశులనూ నాశనం చేయడానికి జలప్రళయాన్ని ఎన్నుకున్నాడు దేవుడు. ఆ తరువాత ఓడలో చేరి రక్షింపబడ్డ నోవా ద్వారానూ, ఇతర జీవజాలం ద్వారానూ పునర్ సృష్టి జరుగుతుంది.

“నలభై పగళ్ళూ, నలభై రాత్రుళ్ళూ ఏకధారగా వర్షం కురిసింది. ఆ వాన నీటిలో నోవా తయారుచేసిన ఓడ తేలింది. ఆ నీటిలో అత్యున్నత పర్వత శిఖరాగ్రాలు సైతమూ మునిగిపోయాయి. పర్వత శిఖరాలపైన మరో 15 క్యూబిట్ల లోతున నీరు నిలిచింది. భూమి మీది సమస్త జీవరాశులూ ఆ నీటిలో మునిగి చచ్చిపోయాయి.

ఆ ఓడలో ఉన్నవారు మాత్రమే బతికి ఉన్నారు. ఆ నీరు మరో 110 రోజులు ఆ విధంగా నిలిచి ఉంది, తరువాత అదృశ్యమైంది. అప్పుడు ఆ ఓడలో నుంచి నోవా, తదితర జీవులూ బయటికి వచ్చి, భూమి మీద మళ్ళీ వృద్ధి పొందాయి" అని బహు వివరంగా బైబిలులో జలప్రళయగాథ రాసి వుంది.

ఈ కథ నుంచి రెండు సందేహాలు తలెత్తుతాయి :

1. వాన నీటి వల్ల పర్వత శిఖరాలు కూడా మునిగిపోవడం సాధ్యమా?

2. నోవాగారు నిర్మించిన ఓడలో భూమి మీది జీవరాశులన్నింటికీ చోటు సరిపోతుందా?

92. అంత చేటు జలప్రళయం సాధ్యమా?

పైన చెప్పిన రెండు సందేహాలకూ సమాధానాలను గణితం ద్వారా సాధించవచ్చు.

అసలు ప్రళయం తాలూకు నీరు అంతా ఎక్కడి నుంచి వచ్చింది? సహజంగా వాతావరణంలో నుంచే వచ్చి ఉండాలి. తరువాత ఆ నీరు అంతా ఎక్కడికి పోయింది? ప్రపంచం అంతటినీ ముంచేసిన నీరు అంతా భూమిలోకి ఇంకిపోవడానికి లేదు. ఆ నీరు పోవడానికి ఉన్న చోటు ఒక్కటే. అదే వాతావరణం. ఆవిరి అయిపోవడం ద్వారా నీరు వాతావరణంలోకి పోయి ఉండాలి. ఇప్పటికీ ఆ ప్రళయపు నీరు వాతావరణంలోనే ఉండి ఉండాలి కదా? కనుక, గాలిలోని నీటి ఆవిరి అంతా ఘనీభవించి, నేల మీద పడిపోతే మరో జలప్రళయం వచ్చి, పర్వత శిఖరాలు కూడా మునిగిపోవాలి. అది నిజంగా సాధ్యమో కాదో చూద్దాం.

మెటియరాలజీకి సంబంధించిన గ్రంథాలలో, వాతావరణంలో ఎంత తేమ ఉన్నదో రాసి ఉంది. ప్రతి ఒక్క చదరపు మీటరు స్థలానికి పైన ఉన్న వాయుస్తంభం (column of air) లో సగటున 16 కిలోగ్రాముల నీటి ఆవిరి ఉందనీ, ఎట్టి పరిస్థితిలోనూ అది 25 కి.గ్రా. దాటదనీ ఈ గ్రంథాలలో రాయబడింది. ఈ నీటి ఆవిరి అంతా ఘనీభవించి వాన రూపంలో నేల మీద పడిపోతే వాన నీరు ఎంత లోతు నిలుస్తుందో చూద్దాం. 25 కి.గ్రా. అంటే 25 000 గ్రాముల నీరు. అంటే, 25 000 ఘనపు సెంటీ మీటర్ల నీటికి సమానం. ఇది ఒక చదరపు మీటరుకి పైన ఉన్న నీరు కదా? ఒక చ.మీ. అంటే $100 \times 100 = 10\ 000$ చ.సెం.మీ. అన్నమాట. నీటి ఘనపరిమాణాన్ని ఈ స్థలం వైశాల్యంచే భాగిస్తే నీటి లోతు తెలుస్తుంది. అది $25\,000 \div 10\,000 = 2.5$ సెం.మీ.కి సమానం.

ఆ మహా జలప్రళయంలో నీటి లోతు రెండున్నర సెం.మీ. దాటడానికి వీలులేదు. ఏమంటే, అంతకన్న ఎక్కువ నీరు వాతావరణంలో లేనే లేదు.*

మన లెక్కల ప్రకారం ప్రళయం తాలూకు వాన నీటి లోతు కేవలం రెండున్నర సెంటీమీటర్లు మాత్రమే. అంతకన్న ఎక్కువ లోతు ఉండటం సాధ్యమే కాదు. 9 కిలోమీటర్ల ఎత్తున్న ఎవరెస్టు శిఖరాన్ని ముంచెయ్యడానికి ఈ నీరు ఏపాటి? బైబిలు జలప్రళయాన్ని 3 60 000 రెట్లు పెంచి, అతిశయోక్తి అలంకారాన్ని ప్రయోగించి ఉండాలి.

మరో సంగతి చూడండి. రెండున్నర సెం.మీ. లోతు వాన నిర్విరామంగా 40 రోజుల పాటు కురిసిందట. అంటే రోజుకి అర మిల్లీ మీటరు ఖర్చు తక్కువే. దీనిని వాన అనడం కన్న తుంపర అనడం సబబుగా ఉంటుంది. శరత్కాలపు తుంపర అయినా ఇంతకు 20 రెట్లు జోరుగా పడుతుంది.

93. అటువంటి ఓడ నిజంగా ఉండేదా?

తరువాత రెండవ సందేహానికి వద్దాం. నోవాగారు రక్షించవలసిన జీవులన్నింటికీ ఆ ఓడలో చోటు ఉంటుందా?

అసలు ఆ ఓడలో ఎంత చోటు ఉందో చూద్దాం. బైబిలులోని వర్ణన ప్రకారం ఆ ఓడ మూడు అంతస్తులుగా ఉంది. ప్రతి అంతస్తూ 300 క్యూబిట్ల పొడవూ, 50 క్యూబిట్ల వెడల్పూ కలిగి ఉంటుంది. పూర్వకాలంలో ఆ ప్రాంత ప్రజలు పొడవు కొలవడానికి ఉపయోగించే క్యూబిట్టు అనే ప్రమాణం సుమారు 45 సెం.మీ. (లేదా 0.45 మీటరు)కి సమానం. మనకి తెలిసిన మెట్రిక్కు మానంలోకి మార్చుకుంటే ఒక్కొక్క అంతస్తు $300 \times 0.45 = 135$ మీటర్ల పొడవు, $50 \times 0.45 = 22.5$ మీటర్ల వెడల్పు కలిగి ఉంది. ఒక్కొక్క అంతస్తులో నేల వైశాల్యం : $135 \times 22.5 = 3040$ చ.మీ. మూడు అంతస్తులలోనూ కలిపి మొత్తం నివాసయోగ్య స్థలం : $3\ 040 \times 3 = 9\ 120$ చ.మీ.

జీవులన్నిటి మాట దేవుడెరుగు, కేవలం సస్తనజీవులకైనా (mammals) ఈ స్థలం చాలుతుందా? ప్రపంచంలో సుమారుగా 3500 రకాల సస్తన జీవులున్నాయి.

---

* భూమి మీద చాలా చోట్ల వర్షపాతం 2.5 సెం.మీ. కన్న ఎక్కువే ఉంటూ ఉంటుంది కదా. అది ఎలా సాధ్యం అయింది అంటారా? ఆ వాన నీరు ఆ ప్రదేశానికి తిన్నగా పైన ఉన్న వాతావరణం నుంచి కూడా కొట్టుకురావడం వల్ల ఇది సాధ్యం అవుతుంది. కాని, బైబిలులోని కథ ప్రకారం ఏక సమయంలో భూమి యావత్తూ జలప్రళయంలో మునగిపోయినట్లు ఉన్నది కనుక ఒక చోట నున్న తేమ మరో చోటుకి "అప్పు"గా ఇవ్వడం సాధ్యం కాదు.

ఈ జీవుల జంటలకే కాక, 150 రోజులకు (అంటే నీరు అదృశ్యమయే వరకూ) సరిపడే మేతకి కూడా చోటు కావాలి. మాంసాహారులైన జంతువులకైతే తమ కోసమే కాక, తాము తినదగ్గ జంతువులకీ, ఆ జంతువులు తినే గడ్డికీ కూడా చోటు వుండాలనే సంగతి మరచిపోకూడదు. ఒక్కొక్క జత సస్తనజీవులకి సగటున ఆ ఓడలో 9 120 ÷ 3 500 = 2.6 చ.మీ. స్థలం మాత్రమే వుంది. ఇది నిజానికి చాలా తక్కువ. పైగా నోవాగారి పెద్ద కుటుంబానికి కూడా ఇందులోనే చోటు చూడాలి. అన్నట్లు జంతువులను ఉంచిన బోనుకీ, బోనుకీ మధ్య చోటు కొంచెమైనా వదలాలి కదా?

సస్తన జీవులే కాక, నోవాగారు తీసుకువెళ్ళవలసిన జీవులు ఇంకా చాలా ఉన్నాయి. అవి సస్తన జీవులంత పెద్దవి కాకపోవచ్చు. కాని, వాటిలో రకాలు చాలా ఎక్కువ. ఆ సంఖ్య ఈ క్రింది విధంగా ఉంది :

పక్షులు	13 000	రకాలు
సరీసృపాలు	3 500	రకాలు
ఉభయ చరాలు	1 400	రకాలు
సాలీడు జాతి పురుగులు	16 000	రకాలు
కీటకాలు	31 60 000	రకాలు

సస్తన జీవులే కిక్కిరిసిపోయి ఉంటే, మిగిలిన వాటికి అసలు చోటే లేదు. ఈ జీవులనన్నిటినీ తీసుకుపోవడానికి ఈ ఓడ అంతకన్న చాలా చాలా పెద్దదిగా ఉండాలి. బైబిలులో వర్ణించిన నోవాగారి ఓడ నిజానికి మరీ చిన్నదేమీ కాదు. నావికుల సాంకేతిక భాషలో చెప్పాలంటే 20 000 టన్నుల "విస్థాపన (displacement)" కలది. బహు పురాతన కాలంలో ఓడల నిర్మాణం ఇంకా గుంట పువ్వులు కాస్తున్న రోజులలో ఇంత పెద్ద సైజు ఓడను నిర్మించగలగడమే అనూహ్యమైన విషయం. అంత పెద్దది అయినప్పటికీ బైబిలులో ఉద్దేశింపబడిన పనికి తగినంత పెద్దది ఏమీ కాదు. ఐదు మాసాల గ్రాసంతో ఒక పెద్ద "జూ" అంత ఉండాలి ఆ ఓడ!

ఒక్కమాటలో చెప్పాలంటే బైబిలులోని జల ప్రళయ గాథ గణిత పరిశీలనకు నిలువలేకపోయింది. అసలు అటువంటి జల ప్రళయం అనేదే అసంభవం. ఒకవేళ ఉన్నా అది కేవలం స్థానికమైన ఉప్పెన కావచ్చు. మిగిలినదంతా ప్రాగ్దేశీయుల ఊహా కల్పన మాత్రమే!

11వ ప్రకరణం

ముప్పై వివిధ సమస్యలు

ఈ పుస్తకం పాఠకుడికి ఉపయోగిస్తుందనీ, కేవలం కాలక్షేపానికే కాక అతని ఆలోచనలకు పదును పెట్టగలదనీ, అతని విజ్ఞానానికి వినియోగం చూపగలదీ అవుతుందని ఆశిస్తున్నా. పాఠకుడు తన వివేకాన్ని పరీక్షించుకోడానికి ఇది పనికి వస్తుందనుకుంటూ ఈ పని కోసమై మరో 30 రకాల సమస్యలను ఈ ప్రకకరణంలో చూపిస్తున్నాను.

94. గొలుసు

ఒక గొలుసు 5 ముక్కలుగా తెగిపోయింది. ఒక్కొక్క ముక్కలో మూడేసి లింకులున్నాయి. 73వ బొమ్మలో చూపినట్లు. ఈ ముక్కలను కమ్మరి దగ్గరకు తీసుకువెళ్ళి, అతుకులు పెట్టి ఇమ్మని అడిగారు.

పని మొదలుపెట్టే ముందు ఆ ముక్కలను ఎన్ని చోట్ల లింకులు విడగొట్టి మళ్ళీ అతుకులు పెట్టవలసి ఉంటుందా అని, ఆ కమ్మరి ఆలోచించాడు. నాలుగుసార్లు అనే నిర్ణయానికి వచ్చాడు.

అంతకన్న తక్కువ సార్లు లింకులు విడగొట్టి, అతకులు పెట్టడం సాధ్యం కాదా?

95. సాలీళ్ళూ - బీటిల్సూ

ఒక పిల్లవాడికి సాలీళ్ళనూ, బీటిల్ పురుగులనూ సేకరించే సరదా ఉంది. ఒక పెట్టెలో మొత్తం అటువంటివి 8 సేకరించాడు. వాటి కాళ్ళు లెక్కపెడితే మొత్తం 54 ఉన్నాయి. అంటే ఎన్ని సాలీళ్ళనూ, ఎన్ని బీటిల్సునీ సేకరించాడన్నమాట?

73వ బొమ్మ : గొలుసు తాలూకు ఐదు ముక్కలు

96. మఫ్లరు - టోపీ - మేజోళ్ళు

ఒకతను ఒక మఫ్లరు, ఒక టోపీ, ఒక జత మేజోళ్ళూ మొత్తం 20 రూబుళ్ళకి కొన్నాడు. టోపీ కన్న మఫ్లరు ఖరీదు 9 రూబుళ్ళు ఎక్కువ. మఫ్లరు, టోపీ కలిస్తే మేజోళ్ళ ధర కన్న 16 రూబుళ్ళు ఎక్కువ. అయితే ఒక్కొక్క వస్తువు ధర ఎంత?

ఈ సమస్యని సమీకరణాలు రాయకుండా నోటిని కట్టాలి.

97. కోడిగుడ్లు - బాతుగుడ్లు

ఆరు బుట్టలలో కోడిగుడ్లు, బాతుగుడ్లు వేరు వేరుగా పెట్టి అమ్మకానికి తెచ్చాడు ఒకడు. వాటిలో వున్న గుడ్ల సంఖ్య 5, 6, 12, 14, 23, 29. “ఈ బుట్టలో గుడ్లు అన్నీ అమ్మేశానంటే బాతుగుడ్లకి రెట్టింపు కోడిగుడ్లు మిగులుతాయి” అన్నాడు.

అతడు ఉద్దేశించిన బుట్ట ఏది?

98. విమానయానం

A అనే పట్టణం నుంచి B అనే పట్టణానికి ఒక విమానం గంటా ఇరవై నిమిషాలలో ప్రయాణం చేస్తుంది. కాని, తిరుగు ప్రయాణానికి 80 నిమిషాలే పడుతుంది. దీనికి కారణం ఏమై ఉంటుంది?

99. బహుమతులు

ఇద్దరు తండ్రులు తమ ఇద్దరు కొడుకులకూ పండుగనాడు కొంత డబ్బు ఇచ్చారు. ఒకడు తన కొడుక్కి 150రూబుళ్ళు ఇచ్చారు. రెండవ వాడు తన కొడుక్కి 100 రూబుళ్ళు ఇచ్చాడు. ఆ కొడుకులిద్దరూ తమకు వచ్చిన డబ్బు లెక్క వేసుకోగా ఇద్దరికీ కలిపి మొత్తం 150 రూబుళ్ళు మాత్రమే వచ్చినట్లు తేలింది. దీనికి కారణం ఏమిటీ?

100. చింతగింజ - సెనగగింజ

ఖాళీ చదరంగం బల్ల మీద ఒక గడిలో ఒక చింతగింజ, మరో గడిలో ఒక సెనగగింజ ఉంచాలి. ఎన్ని వివిధ పద్ధతులలో ఈ రెండింటినీ అమర్చవచ్చునో తెలుసా?

101. రెండు అంకెలు

రెండు అంకెలతో రాయదగ్గ కనిష్ఠ సంఖ్య ఏది?

102. ఒకటి

సున్నా నుండి తొమ్మిది వరకూ గల పది అంకెలనూ ఉపయోగించి 1 విలువ వచ్చేటట్లు రాయగలవా?

103 ఐదు తొమ్మిదులు

ఐదు తొమ్మిదులు ఉపయోగించి 10 వచ్చేటట్లు – అధమం రెండు వివిధ పద్ధతులలో రాయి.

104. పది అంకెలు

సున్నా నుంచి 9 వరకూ గల పది అంకెలనూ ఉపయోగించి, 100 వచ్చేటట్లు నువ్వు ఎన్ని రకాలుగా రాయగలవు? మాకు నాలుగు రకాలు తెలుసు.

105. నాలుగు రకాలు

ఒకే రకం 5 అంకెలు ఉపయోగించి 100 వచ్చేటట్లు నాలుగు వేరు వేరు రకాలుగా రాయగలవా?

106. నాలుగు ఒకట్లు

నాలుగు ఒకట్లు ఉపయోగించి రాయదగ్గ గరిష్ఠ సంఖ్య ఏది?

107. వింత భాగహారం

ఈ క్రింది భాగహారంలో నాలుగు 4లు తప్ప మిగిలిన అంకెలన్నీ * అనే గుర్తుతో సూచింపబడ్డాయి. అదృశ్యమైన ఆ అంకెలను పూర్తి చేయగలవా?

```
*  *  *) *  *  *  *  *  *  4(* 4 * *
          *  *  *
          ---------
          *  *  4  *
          *  *  *  *
          -----------
             *  *  *  *
                *  4  *
             -------------
             *  *  *  *
             -------------
```

ఈ సమస్యని అనేక విధాలుగా సాధించవచ్చు.

108. మరో భాగహారం

అటువంటిదే మరో వింత భాగహారం. ఇందులో 7లు తప్ప మిగిలిన అంకెలన్నీ * తో సూచించబడ్డాయి.

```
* * 7 *  *) *  * 7  *  *  *  * *  *(* * * * 7 *
            *  * *  *  *  *
            ------------------
            *  * *  *  *  7  *
            *  * *  *  *  *  *
             ----------------------
               * 7  *  *  *  *
               * 7  *  *  *  *
               ---------------------
               *  *  * *  *  *  * *
               *  *  * *  7  *  *
               --------------------
                       *  *  * *  *  *
                       *  *  * *  *  *
                       --------------------
```

109. ఎంత పొడుగు?

ఒక చదరపు మీటరు వైశాల్యం గల గ్రాఫు పేపరు తీసుకుని, అందులో ఉన్న మిల్లీ మీటరు చదరాలన్నీ కత్తిరించి ఒకదాని పక్క ఒకటి పెడితే మొత్తం ఎంత పొడుగు అవుతుందో నోటిని లెక్క కట్టగలవా?

110. అటువంటిదే మరొకటి

ఒక ఘనపు మీటరులో వుండే మిల్లీ మీటరు ఘనాలని ఒకదానిమీద మరొకటి పెట్టినప్పుడు వచ్చే స్తంభం ఎత్తుని నోటిన లెక్కగట్టు.

111. విమానం

12 మీటర్ల పొడవు గల విమానం ఒకటి సరిగ్గా నడినెత్తిన ఎగురుతూ ఉండగా ఒకతను ఫొటో తీశాడు. ఆ కెమేరా లోతు 12 సెం.మీ. ఫొటోలో ఆ విమానం బొమ్మ 8 మి.మీ. పొడవు వుంది.

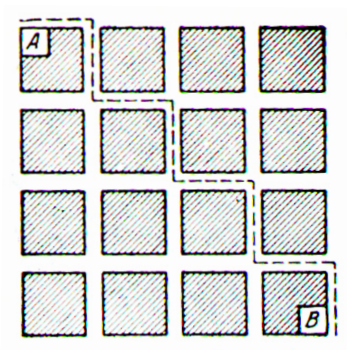
ఫొటో తీసినప్పుడు ఆ విమానం ఎంత ఎత్తున ఎగురుతోంది?

112. మిలియను వస్తువులు

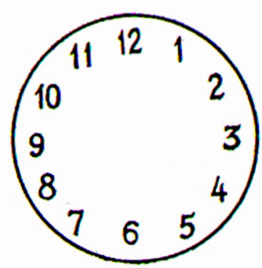
ఒక వస్తువు బరువు 89.4 గ్రాములు. అటువంటివి ఒక మిలియను వస్తువులు ఎన్ని టన్నుల బరువు తూగుతాయో నోటిని లెక్క కట్టగలవా?

113. వివిధ మార్గాలు

74వ బొమ్మలో ఒక ఎస్టేటు తాలూకు ప్లాను గీసి ఉంది. ఒకడు చుక్కలు పెట్టిన దారిగుండా వెళ్ళి A నుంచి B చేరుకున్నాడు. A నుంచి Bకి వెళ్ళడానికి ఇదొక్కటే మార్గం కాదు కదా? అటువంటి వేరు వేరు మార్గాలు ఎన్ని వీలు అవుతాయో చెప్పగలవా?



74వ బొమ్మ : వేసవి కాలపు ఎస్టేటును విభజించే మార్గాలు



75వ బొమ్మ : గడియారపు డయలును ఆరు భాగాలుగా కత్తిరించు

114. గడియారపు ముఖం

75వ బొమ్మలో చూపిన గడియారపు డయలును నీకు తోచిన ఆకారాలలో 6 ముక్కలుగా కత్తిరించాలి. కాని, ప్రతి ముక్కలోనూ అంకెల మొత్తం సమానంగా ఉండాలి. ఈ సమస్య నీ ఊహాశక్తిని పరీక్షిస్తుంది.

115. ఎనిమిది కోణాల నక్షత్రం

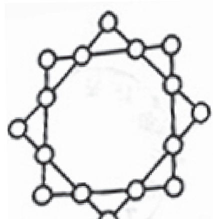
76వ బొమ్మలో చూపిన 8 కోణాల నక్షత్రంలో ఉన్న చిన్న చిన్న సున్నాలలో 1 నుంచి 16 వరకూ అంకెలు వెయ్యాలి. ఏ భుజం కూడినా మొత్తం 34 రావాలి. అలాగే కోణాల దగ్గర అంకెల మొత్తం కూడా 34 అవ్వాలి.

116. అంకెల చక్రం

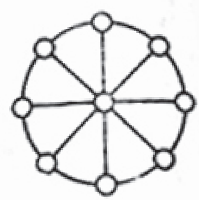
77వ బొమ్మలో చూపిన చక్రంలో ఏ వరుస కూడినా (వ్యాసంలో ఆ చివరా, ఈ చివరా, మధ్యలోనూ ఉన్న 3 అంకెలూ కూడితే) మొత్తం 15 వచ్చేటట్లు 1 నుంచి 9 వరకూ అంకెలు వెయ్యాలి.

117. ముక్కాలి పీట

కాళ్ళు వేరు వేరు పొడవులు కలవి అయినప్పటికీ ముక్కాలి పీట స్థిరంగా నిలుచుంటుంది అంటారు. నిజమా?



76వ బొమ్మ :
ఎనిమిది కోణాల నక్షత్రం



77వ బొమ్మ : గడియారపు
అంకెల చక్రం

78వ బొమ్మ : ఈ కోణముల విలువ ఎంతెంత?

118. కోణాలు

78వ బొమ్మలో చూపిన గడియారపు బొమ్మలలో ముళ్ళ మధ్య కోణాల విలువలు కొలిచి చూడకుండా నోటిని కట్టగలవా?

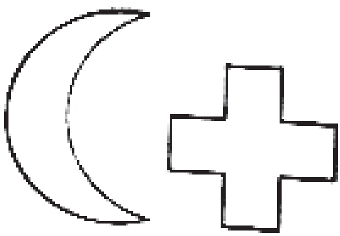
119. భూమధ్య రేఖ మీద

మనం భూమధ్య రేఖ మీదుగా భూమి చుట్టూ నడిచి వస్తే మన కాళ్ళు నడిచిన వృత్తం కన్న, మన తల చుట్టి వచ్చిన వృత్తం యొక్క చుట్టుకొలత ఎంత పెద్దదో చెప్పగలరా?

120. ఆరు వరుసలు

తొమ్మిది గుర్రాలను పది గదులలో పెట్టడాన్ని గురించిన హాస్య కథ మీరు వినే ఉంటారు. పైకి చూస్తే ఆ విధంగానే కనిపించే సమస్య ఇది. కాని భేదం అల్లా ఇది అసాధ్యమైన సమస్య కాదు.

24 మంది మనుష్యులను వరుసకి ఐదుగురు చొప్పున 6 వరుసలలో నిలుచోబెట్టడం ఎలాగ?



79వ బొమ్మ : నెలవంకను సిలువగా మార్చడం ఎలా?

80వ బొమ్మ :
క్యూబును ఒక్కొక్క అంచుకి సమాంతరంగా రెండేసి సమతలములలో కొయ్యాలి

121. సిలువ - నెలవంక

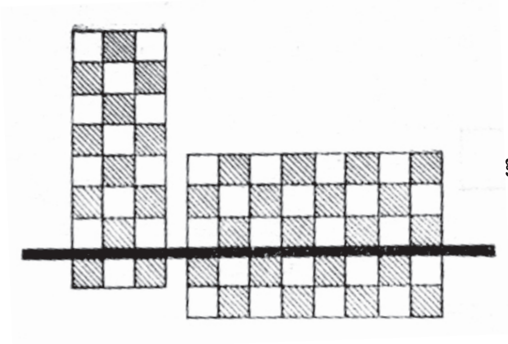
79వ బొమ్మలో నెలవంక వుంది. ఈ నెలవంక వైశాల్యానికి సమానమైన వైశాల్యం గల సిలువ బొమ్మను గీయడం ఎలాగ?

122. క్యూబును కోయడం

3 సెం.మీ. పొడవు, వెడల్పు, మందం కలిగిన ఘనాకారపు కఱ్ఱ దిమ్మ (క్యూబు) ఒకటి వుంది. దాని ఘనపరిమాణం 27 ఘ.సెం.మీ. కదా? ఈ దిమ్మను 1 సెం.మీ. భుజము గల 27 క్యూబులుగా కోయవచ్చు. పొడవుగా రెండుసార్లు, అడ్డంగా రెండుసార్లు (80వ బొమ్మ), నిలువుగా రెండు సార్లు అంచులకు సమాంతరంగా కోయడం ద్వారా, అంటే మొత్తం 6 కోతల ద్వారా) ఆ దిమ్మను 27 చిన్న క్యూబులుగా కోయవచ్చునన్నది అందరికీ తెలిసిన విషయమే. ఇప్పుడు మన సమస్య ఏమిటంటే, ప్రతీ కోత తరువాతనూ వచ్చిన ముక్కలను అవసరానికి అనుకూలంగా అమర్చుకుని, తరువాత కోత కోయవచ్చుననే అదనపు సౌకర్యం కూడా ఉందనుకుంటే, అప్పుడు 6 కన్న తక్కువ కోతలలో ఆ దిమ్మను 27 చిన్న క్యూబులుగా కోయడం సాధ్యమా? అయితే ఎలాగా?

123. మరో కోతల సమస్య

పై కోతల సమస్యను పోలినదే ఇదీనూ. మామూలు చదరంగపు బల్లను 64 చిన్న చదరాలుగా (8 × 8) కొయ్యాలి. బల్ల మీద గీసి ఉన్న సరళరేఖలలోనే కోతలు కొయ్యాలి. ప్రతి కోత తరువాతనూ వచ్చిన ముక్కలను అవసరానికి అనుకూలంగా అమర్చుకుని, అనేక ముక్కలను ఏక సమయంలో తరువాతిసారి కోయవచ్చు (81వ బొమ్మ). 64 చిన్న చదరాలుగా కోయడానికి అటువంటి కోతలు ఎన్ని కావాలి?



81వ బొమ్మ :
కోత కోసే ముందు ముక్కలను అవసరానికనుకూలంగా అమర్చుకోవచ్చు.

94 నుండి 123 వరకూ జవాబులు

94. కేవలం 3 లింకులు విడదీస్తే చాలు ఈ పని పూర్తి అవుతుంది. ఆ ఐదు ముక్కలలోనూ ఒక ముక్కలోని మూడు లింకులనూ విడదీసి, మిగిలిన నాలుగు ముక్కల చివరి లింకులను అతికించడం ద్వారా గొలుసు పూర్తి అవుతుంది.

ఈ సమస్యని సాధించడానికి ప్రయత్నించే ముందు సాలీడుకీ, బీటిల్ పురుగుకీ ఎన్నేసి కాళ్ళు ఉంటాయో తెలుసుకోవడం అవసరం. సాలీడుకి 8 కాళ్ళు, బీటిల్‌కి 6 కాళ్ళు ఉంటాయని ప్రకృతి శాస్త్రంలో చదువుకున్న సంగతులు మీకింకా జ్ఞాపకం ఉండే ఉంటాయి.

మాట వరసకి అందులో ఉన్నవి ఎనిమిదీ బీటిలు పురుగులే అనుకుందాం. అప్పుడు మొత్తం కాళ్ళు : $6 \times 8 = 48$ ఉండాలి. కాని, అలాగయితే సమస్యలో చెప్పుకున్న వాటికన్న 6 కాళ్ళు తక్కువ అవుతాయి. ఒక బీటిలుని తీసి, దాని స్థానంలో ఒక సాలీడును పెడితే కాళ్ళ సంఖ్య మరో రెండు పెరుగుతుంది. ఏమంటే, సాలీడుకి బీటిలు కన్న 2 కాళ్ళు ఎక్కువ కనుక.

ఇలా చేసుకుంటూ వెడితే 3 బీటిల్సు తీసి, వాటికి బదులు 3 సాలీళ్ళను పెడితే కాళ్ళ సంఖ్య 54 అవుతోందని తెలుస్తోంది. కనుక బీటిలు పురుగుల సంఖ్య 8కి బదులు 5 మాత్రమే వుంటుంది. మిగిలినవి మూడూ సాలీళ్ళు.

కనుక, ఆ పిల్లవాడు డబ్బాలో సేకరించి పెట్టుకున్నవి 5 బీటిల్సూ, 3 సాలీళ్ళూనూ. లెక్క సరిపోయిందేమో చూద్దాం. 5 బీటిల్సుకి మొత్తం కాళ్ళు 30. మూడు సాలీళ్ళకి 24 కాళ్ళు. కనుక మొత్తం $30 + 24 = 54$ కాళ్ళు.

ఈ లెక్కనే మరోలా సాధించవచ్చు. డబ్బాలో ఉన్నవి ఎనిమిదీ సాలీళ్ళే అనుకుంటే, కాళ్ళు $8 \times 8 = 64$ అవుతాయి. అంటే, సమస్యలో ఇచ్చిన కాళ్ళ సంఖ్య కన్న 10 ఎక్కువ. ఒక సాలీడును తీసి దాని స్థానంలో ఒక బీటిలును ఉంచితే కాళ్ళ సంఖ్య రెండు తగ్గుతుంది. కనుక 5 బీటిల్సుని ఉంచాలి. మిగిలిన మూడూ సాలీళ్ళు. అప్పుడు కాళ్ళ సంఖ్య 54 అవుతుంది.

96. ఒక మఫ్లరు, ఒక టోపీ, ఒక జత మేజోళ్ళూ కొనడానికి బదులు, 2 జతల మేజోళ్ళు మాత్రమే కొని వుంటే అప్పుడు అతనికి అయ్యే ఖర్చు 20 రూబుళ్ళు. కాక, మఫ్లరు టోపీల మొత్తం ధర కన్న ఒక జత మేజోళ్ళు ఎంత

తక్కువో అంత (అంటే 16 రూబుళ్ళు) తగ్గి ఉండును. అంటే, 2 జతల మేజోళ్ళ ఖరీదు 20–16= రూబుళ్ళు. కనుక ఒక జత మేజోళ్ళ వెల 2 రూబుళ్ళు.

ఒక మఫ్లరు, ఒక టోపీ కలిపితే 20–2=18 రూబుళ్ళు అవుతుందని ఇప్పుడు మనకు తెలుసు. టోపీ కన్న మఫ్లరు వెల 9 రూబుళ్ళు ఎక్కువ అని కూడా తెలుసు. ఇంతకు ముందు చేసిన పద్ధతిలోనే చేస్తే – అంటే ఒక మఫ్లరు, ఒక టోపీ కొనడానికి బదులు 2 టోపీలు మాత్రమే కొని వుంటే, అప్పుడు అతను 18 రూబుళ్ళు కాక 9 రూబుళ్ళు తక్కువ ఇవ్వవలసి వచ్చును. అంటే 2 టోపీల వెల 18–9=9 రూబుళ్ళు. లేదా, ఒక టోపీ వెల 4 రూబుళ్ళ 50 కోపెక్కులు.

మొత్తం మీద వాటి ధరలు ఇవీ. మేజోళ్ళ జత 2 రూబుళ్ళు; టోపీ 4 రూబుళ్ళు 50 కోపెక్కులు; మఫ్లరు వెల 13 రూబుళ్ళ 50 కోపెక్కులు.

97. గుడ్లు అమ్మినవాడు చూపించిన బుట్ట 29 గుడ్లు ఉన్నది అయి వుండాలి. 23, 12, 5 గుడ్లు ఉన్నవి కోడిగుడ్ల బుట్టలు. 14, 6 గుడ్లున్నవి బాతుగుడ్ల బుట్టలు.

లెక్క సరిపోయిందో లేదో చూద్దాం :

23 + 12 + 5 = 40 కోడిగుడ్లు,

14 + 6 = 20 బాతుగుడ్లు

మిగులుతాయి. కనుక బాతుగుడ్లకి రెట్టింపు కోడిగుడ్లు ఉంటాయి.

98. ఇందులో సాధించవలసినది ఏమీ లేదు. విమానం A నుంచి B కి, మళ్ళీ వెనుకకు ప్రయాణం చేయడానికి పట్టిన కాలాలు సమానమే. ఏమంటే 80 నిమిషాలు అన్నా, 1 గంటా 20 నిమిషాలు అన్నా ఒకటే కదా!

99. ఈ సమస్యలోని మెలిక ఏమిటంటే, ఒకరి తండ్రి మరొకరి కొడుకు అయి వుండటమే. అక్కడ ఉన్నది ముగ్గురే మనుష్యులు. నలుగురు కాదు. తాత, తండ్రి, మనుమడూనూ. తాత తన కొడుక్కి 150 రూబుళ్ళు ఇచ్చాడు. అతడు అందులో నుంచి 100 రూబుళ్ళు తీసి మనవడికి (అంటే తన కొడుక్కి) ఇచ్చుకున్నాడు.

100. చింతగింజను 64 గదులలలో ఏ గదిలోనైనా పెట్టవచ్చు. అంటే, చింతగింజను 64 విధాలుగా పెట్టవచ్చునన్నమాట. చింతగింజను బల్ల మీద పెట్టిన తరువాత సెనగగింజకి 63 గదులు మిగులుతాయి. అంటే, చింతగింజను ఉంచదగ్గ

64 పద్ధతులలోనూ ప్రతి పద్ధతికి సెనగగింజను ఉంచదగ్గ పద్ధతులు 63 ఉంటాయి. కనుక మొత్తం పద్ధతులు : $64 \times 63 = 4032$.

101. రెండు అంకెలలో రాయదగ్గ కనిష్ఠ సంఖ్య 10 అనుకుంటున్నారేమో. కాదు. ఒకటి ఎలాగ అంటారా?

$$\frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \frac{4}{4} = \dots \frac{9}{9} = 1.$$

బీజ గణితంతో పరిచయం ఉన్నవారు ఇంకా అనేక రకాలుగా రాయగలరు :

$1^0 = 2^0 = 3^0 = 4^0 = \dots . \; 9^0 = 1.$

ఏ సంఖ్యనైనా సున్నా ఘాతానికి (power) పెంచితే ఒకటి ఒకటి వస్తుంది.*

102. ఒకటిని రెండు భిన్నముల మొత్తంగా చూపించవచ్చు.

$$\frac{148}{296} + \frac{35}{70} = 1.$$

బీజ గణితం తెలిసినవారు ఇంకా రకరకాలుగా రాయగలుగుతారు. ఉదాహరణకి,

$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9^0$; $2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7^{9-8-1}$, వగైరా, వగైరా.,

ఏ సంఖ్యనైనా సున్నా ఘాతానికి పెంచితే వచ్చేది ఒకటే కదా ?

103. ఆ రెండు పద్ధతులు ఇవీ :

$$9 + \frac{99}{99} = 10.$$

$$\frac{99}{99} - \frac{9}{9} = 10.$$

* % అని గాని 0^0 అని గాని రాయకూడదు. వీటికి అర్థం లేదు.

బీజ గణితం తెలిస్తే ఇంకా ఎన్నో రకాలుగా రాయవచ్చు. ఉదాహరణకి :

$$\left(9+\frac{9}{9}\right)^{9/9} = 10$$

$9 + 99^{\,9-9} = 10.$

104. ఇక్కడ నాలుగు రకాల సొల్యూషన్‌లు చూపిస్తున్నాను :

$$70 + 24 + \frac{9}{18} + 5 + \frac{3}{6} = 100,$$

$$80 + \frac{27}{54} + 19 + \frac{3}{6} = 100,$$

$$87 + 9 + \frac{4}{5} + 3 + \frac{12}{60} = 100,$$

$$50 + \frac{1}{2} + 49 + \frac{38}{76} = 100.$$

105. ఒకే రకపు అంకెలు 5 ఉపయోగించి 100 రాయవచ్చు. ఆ అంకెలు ఒకట్లు, మూళ్ళు, ఐదులు అయితే సులభం. దీన్ని నాలుగు విధాలుగా చూపించవచ్చు :

$111 - 11 = 100,$

$33 \times 3 + \frac{3}{3} = 100,$

$5 \times 5 \times 5 - 5 \times 5 = 100,$

$(5 + 5 + 5 + 5) \times 5 = 100$

106. ఈ సంఖ్య 1111 అని సామాన్యంగా అనుకుంటారు. కాని, అంత కన్న చాలా చాలా రెట్లు పెద్ద సంఖ్యను రాయవచ్చు. అది ఎలాగంటే 11^{11}. అంటే, 11ని అదే సంఖ్య పెట్టి 11 సార్లు గుణించగా వచ్చే సంఖ్య అని అర్థం (లాగరిథమ్స్ ఉపయోగిస్తే ఈ గుణకారం చాలా సులభం అవుతుంది). ఓపికగా గుణిస్తే దాని విలువ 280 000 000 000 కన్న అధికం అని గ్రహిస్తారు. కనుక 1111 కన్న 25 కోట్ల రెట్లు పెద్ద సంఖ్యను రాయవచ్చునన్నమాట.

107. దీనికి 4 రకాల జవాబులు ఉన్నాయి :

1 337 174 ÷ 943 = 1 418

1 343 784 ÷ 949 = 1 416

1 200 474 ÷ 846 = 1 419.

1 202 464 ÷ 848 = 1 418

108. ఈ సమస్యకి ఒకటే ఒక జవాబు.

7 375 428 413 ÷ 125 473 = 58 781.

107వ సమస్య, 108వ సమస్య కొంచెం కష్టమైనవి. ఈ సమస్యలు 1906లో (School World) అనే అమెరికన్ పత్రికలోనూ, 1920లో Mathematical Journal అనే అమెరికన్ పత్రికలోనూ ప్రచురితమయ్యాయి.

109. ఒక చదరపు మీటరు 1 000 000 చదరపు మిల్లీ మీటర్లకి సమానం. వెయ్యి మిల్లీ మీటరు చదరాలను వరుసగా పెడితే ఒక మీటరు పొడవు అవుతుంది. కనుక 1 000 000 చదరాలు 1 000 మీటర్లు లేదా ఒక కిలో మీటరు పొడవు అవుతుంది.

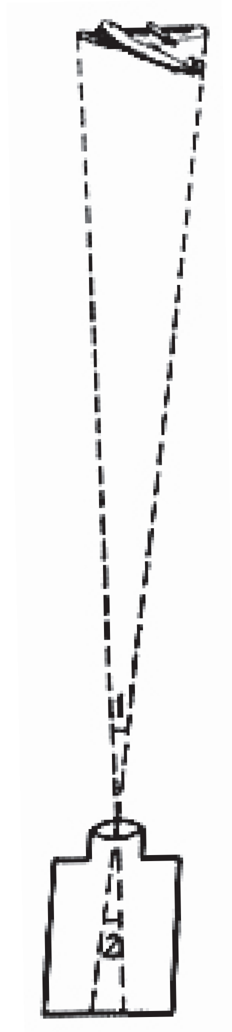
110. దీని జవాబు ఆశ్చర్యకరంగా ఉంటుంది. ఆ స్తంభం ఎత్తు వెయ్యి కిలోమీటర్లు ఉంటుంది. ఈ లెక్క నోటిని కడదాం :

1. ఘనపు మీటరు = 1000 × 1000 × 1000 ఘనపు మిల్లీ మీటర్లు.

1 000 000 మిల్లీ మీటరు క్యూబులు ఒకదాని మీద ఒకటి పెడితే ఒక కిలోమీటరు ఎత్తు అవుతుంది. మన దగ్గర అంతకు 1 000 రెట్ల క్యూబులున్నాయి. కనుక ఆ స్తంభం ఎత్తు 1000 కిలోమీటర్లు.

111. 82వ బొమ్మను చూస్తే 1, 2 కోణములు సమానములు అని తెలుస్తుంది. కనుక,

$$\frac{\text{విమానపు సైజు}}{\text{బొమ్మ సైజు}} = \frac{\text{విమానం ఎత్తు}}{\text{కెమేరా లోతు}}$$



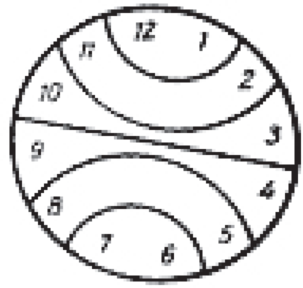
82వ బొమ్మ

విమానం ఎత్తు X మీటర్లు అనుకుంటే 12 000 : 8 = X : 0.2 అనే సమీకరణాన్ని రాయవచ్చు.

కనుక $x = 180$ మీటర్లు.

112. ఈ సమస్యని నోటిని సాధించే పద్ధతి ఇది.

89.4 గ్రాములను 1 000 000 చేత గుణించాలి. దీనిని రెండు అంగలలో చేయవచ్చు.



83వ బొమ్మ

89.4 గ్రా. × 1 000 = 89.4 కి.గ్రా.

1 కి.గ్రా. = 1000 గ్రా. కనుక, 89.4 కి.గ్రా. × 1 000 = 89.4 టన్నులు. 1 000 కి.గ్రా. = 1 టన్ను కనుక మనకు కావలసిన బరువు : 89.4 టన్నులు.

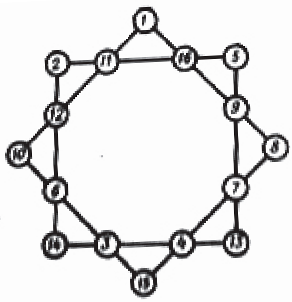
113. A నుంచి Bకి వెళ్ళడానికి 70 రకాల మార్గాలున్నాయి (బీజ గణితంలో చదువుకునే పాస్కల్ త్రిభుజం సహాయంతో ఈ సమస్యను సాధించవచ్చు).

114. గడియారం డయలు మీద ఉన్న అంకెల మొత్తం 78కి సమానం కనుక, 6 భాగాలుగా కత్తిరిస్తే ఒక్కొక్క భాగంలోని అంకెల మొత్తం : 78 ÷ 6 = 13 అవ్వాలి. దీనిని ఉపయోగించి ఈ సమస్యని సాధించవచ్చు. (జవాబు 83వ బొమ్మలో చూపబడింది).

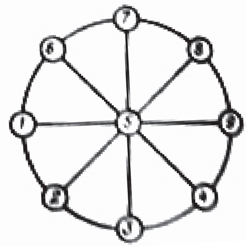
115, 116. వీటి జవాబులు 84, 85 బొమ్మలలో చూపబడ్డాయి.

117. ముక్కాలి పీట ఎటువంటి నేల మీదనైనా స్థిరంగా ఎందుకు నిలబడుతుందంటే ఇచ్చిన ఏ మూడు బిందువుల గుండానైనా సరే ఒక సమతలం, ఒకే ఒక్క దానిని గీయవచ్చును. కనుక ముక్కాలిపీట స్థిరత్వానికి కారణం క్షేత్ర గణితం తప్ప భౌతికమైనది కాదు.

అందుచేతనే కెమేరాలకూ, భూమిని సర్వే చేసే పరికరాలకూ ముక్కాలి స్టాండులను వాడతారు. నాలుగవ కాలు చేర్చితే దాని స్థిరత్వం పెరగదు సరికదా ప్రతిబంధకం కూడానూ.



84వ బొమ్మ



85వ బొమ్మ

118. ఆ గడియారాలు ఎంత టైము చూపిస్తున్నాయో గమనిస్తే ఈ సమస్యను సులభంగానే సాధించవచ్చు. 78వ బొమ్మలో ఎడమ వైపున ఉన్న గడియారంలో 7 గంటలు అయినట్లు తెలుస్తోంది. కనుక ఆ రెండు ముళ్ళ మధ్యనున్న చాపం పూర్తి వృత్త పరిధిలో 5/12వ వంతు. అదే, డిగ్రీలలో చెప్పాలంటే :

$$360^0 \times \frac{5}{12} = 150^0$$

కుడివైపు గడియారంలో టైము 9.30 గంటలు. కనుక వాటి మధ్య చాపం వృత్త పరిధిలో $3\frac{1}{2}/12$ వ వంతు లేదా 7/24 వ వంతు. దీనినే డిగ్రీలలో చెప్పాలంటే.

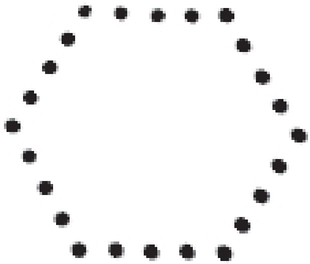
$$360^0 \times \frac{7}{24} = 105^0$$

119. సగటు మనిషి పొడవు 175 సెం.మీ. అనుకుందాం. భూమి వ్యాసం R సెం.మీ. అయితే కాళ్ళు నడిచిన వృత్తపు చుట్టు కొలత :

2 × 3.14 × R సెం.మీ.

తల చుట్టిన వృత్తపు చుట్టుకొలత : 2 × 3.14 (R+ 175) సెం.మీ.

ఈ రెండింటి భేదం : 2 × 3.14 × 175 = 1 100 సెం.మీ. లేక 11 మీటర్లు.



86వ బొమ్మ

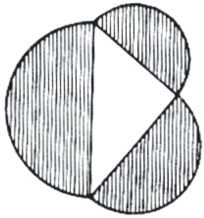
ఇందులో విచిత్రమైన సంగతి ఏమిటంటే, దీని జవాబు భూవ్యాసార్థం మీద ఆధారపడి లేదు. భూమి వంటి గ్రహం చుట్టూ తిరిగినా, చిన్న బంతి చుట్టూ తిరిగినా జవాబులో మార్పు ఉండదు.

120. 86 బొమ్మలో చూపినట్లు మనుష్యులను షడ్భుజాకారంలో నిలుచోబెట్టాలి.

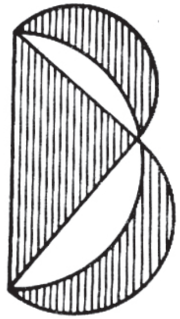
121. వృత్తమును చతురస్రీకరించడం అసాధ్యం అని విని వున్న పాఠకులు ఈ సమస్యను క్షేత్రగణితం ద్వారా సాధించడం అసాధ్యం అని అనుకోవచ్చు.*

వృత్తమును చతురస్రంగా మార్చలేనప్పుడు రెండు వృత్త ఖండముల కలయికచే ఏర్పడ్డ నెలవంకను ఐదు చదరముల కలయిక అయిన సిలువగా మార్చడం ఎలా సాధ్యం అని సందేహించవచ్చు. ఏమయితేనేమి, క్షేత్ర గణిత నిర్మాణాదుల చేత ఈ సమస్య సాధ్యమే. దీనికి సుప్రసిద్ధమైన పైథాగరస్ సిద్ధాంతం తాలూకు ఉపప్రమేయం (corollary) ఒకదాన్ని ఉపయోగించాలి. లంబ కోణ త్రిభుజము యొక్క కర్ణము మీద నిర్మించిన అర్ధ వృత్తముల వైశాల్యము, మిగిలిన రెండు భుజముల మీద నిర్మించిన అర్ధ వృత్తముల వైశాల్యముల మొత్తానికి సమానం అన్నదే ఈ ఉపప్రమేయం (87వ బొమ్మ). ఇప్పుడు 88వ బొమ్మలో చూపినట్లు కర్ణము మీది అర్ధ వృత్తాన్ని రెండవ వైపుకి పడవేసి చూస్తే, రెండు నెలవంకల

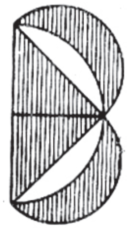
* వృత్తమును చతురస్రీకరించడం అంటే, ఇచ్చిన వృత్తము యొక్క వైశాల్యమునకు సమానమైన వైశాల్యము గల చతురస్రాన్ని క్షేత్ర గణిత సూత్రాలననుసరించి నిర్మించడమన్న మాట. రూలరు, వృత్తలేఖిని మాత్రమే ఉపయోగించి క్షేత్ర గణితాన్ని నిర్మించిన గ్రీకు విద్వాంసులు వృత్తమును చతురస్రీకరించడం అనేది అసాధ్య సమస్యలలో ఒకటిగా గుర్తించారు. – అనువాదకుడు.



87వ బొమ్మ



88వ బొమ్మ



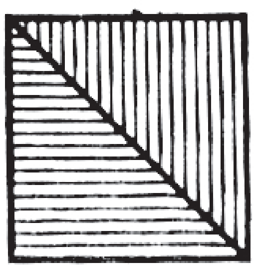
89వ బొమ్మ

వైశాల్యముల మొత్తం (గీతలు గీసిన భాగాలు) త్రిభుజ వైశాల్యానికి సమానం అని తెలుస్తుంది.*

ఇప్పుడు సమద్విబాహు లంబకోణ త్రిభుజాన్ని తీసుకున్నట్లయితే ఈ నెలవంకలలో ప్రతి ఒక్కటీ ఆ త్రిభుజ వైశాల్యంలో సరిగ్గా సగం ఉంటుంది (89వ బొమ్మ).

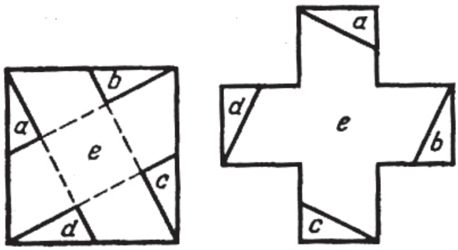
కనుక, ఇచ్చిన నెలవంకకు సమానమైన లంబ సమద్విబాహు త్రిభుజాన్ని నిర్మించడం క్షేత్ర గణితం ద్వారా సాధ్యమే.

లంబ సమద్విబాహు త్రిభుజాన్ని చదరంగా మార్చడం సులభమే (90వ బొమ్మ). కనుక నెలవంకను చదరంగా మార్చడం క్షేత్ర గణితం ద్వారా సాధ్యమేనని తెలుస్తోంది కదా.

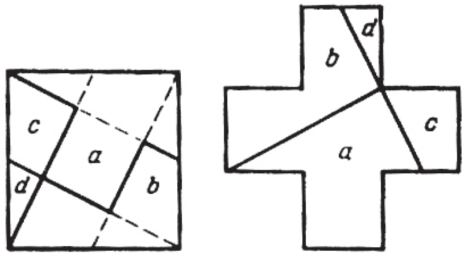


90వ బొమ్మ

* క్షేత్ర గణితంలో దీనిని హిపోక్రటిస్ నెలవంకల సిద్ధాంతం అంటారు.



91వ బొమ్మ



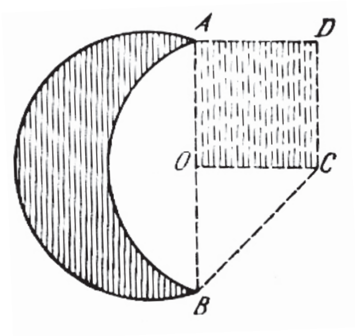
92వ బొమ్మ

ఇక మిగిలినదల్లా ఈ చదరాన్ని సిలువగా మార్చడమే (సిలువ అనగా సమాన చదరములు కలిగిన ఆకృతి). దీనిని అనేక విధములుగా నిర్మించవచ్చు. అటువంటివి రెండు పద్ధతులు 91, 92వ బొమ్మలలో చూపబడ్డాయి. ఈ రెండు పద్ధతులూ కూడా శీర్షములను ఎదుటి భుజముల యొక్క మధ్య బిందువుకి కలిపే సరళ రేఖలతో మొదలు అవుతాయి.

నెలవంక తయారు అవడానికి రెండు రకాల చాపములు (arcs) వినియోగం అవుతాయి. అందులో వెలుపలి చాపం అర్ధవృత్తం; లోపలి చాపము మరో పెద్ద వృత్తం తాలూకు చుట్టుకొలతలో నాలుగో వంతు అని గుర్తుంచుకోవాలి.*

---

* మనం ఆకాశంలో చూచే నెలవంక ఆకృతి దీనికి కొంచెం భిన్నంగా ఉంటుంది. వెలుపలి చాపం అర్ధవృత్తమూ, లోపలి చాపము అర్ధ అండ వృత్తమూనూ (semiellipse). చిత్రకారులు నెలవంకను తప్పుగా గీస్తూ ఉంటారు రెండు వృత్తచాపములతో.

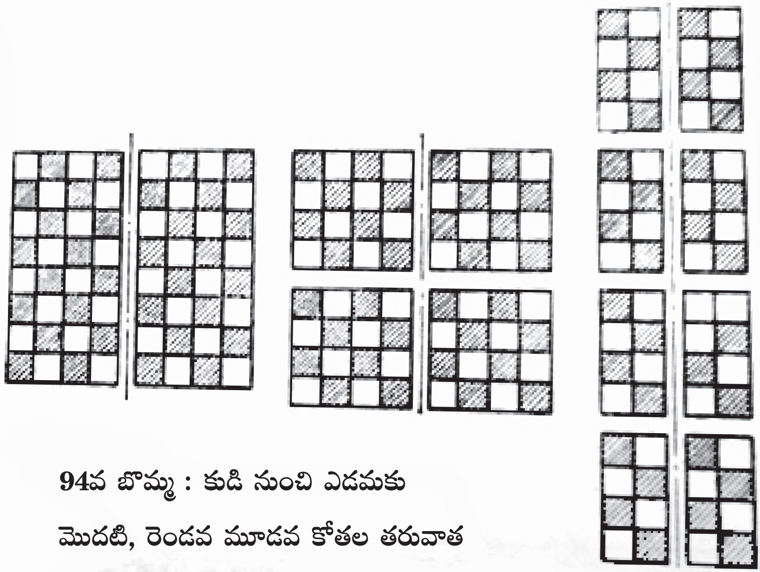


93వ బొమ్మ

నెలవంకకు సమానమై సిలువను గీసే పద్ధతి చూపిస్తున్నాను. 93వ బొమ్మలో నెలవంక యొక్క A, B అనే తుది బిందువులను కలుపుతూ ఒక సరళ రేఖ గీయాలి. ఈ సరళ రేఖ యొక్క మధ్య బిందువు అయిన O నుంచి OC = OA అయేటట్లు ఒక లంబ రేఖ గీయాలి. OAC అనే సమద్విబాహు త్రిభుజాన్ని రెట్టింపు చేసి OADC అనే చతురస్రాన్ని తయారు చేయాలి. ఈ చదరాన్ని పైన చూపిన ఏదో ఒక పద్ధతిలో (91, 92 బొమ్మలు) సిలువగా మార్చాలి.

122. కోసేటప్పుడు ముక్కలను జోడించవచ్చునని కొత్తగా ఇచ్చిన అవకాశం వల్ల అధిక లాభం ఏమీ లేదు. ఇంకా ఆరు కోతలూ అవసరమే. పెద్ద క్యూబులోని 27 చిన్న ముక్కలలోనూ లోపల ఉండే క్యూబు యొక్క 6 అంచులూ విడిపోవాలంటే ఆరు కోతలూ అవసరమే. ఒకే కోతలో రెండు అంచులు ఏర్పడవు, వివిధ భాగాలను ఎన్ని విధాలుగా మార్చుకున్నా సరే.

123. సాధ్యమైనన్ని తక్కువ కోతలలో దీనిని సాధించడం ఎలాగో చూద్దాం. మొదటి కోత తరువాత చదరంగపు బల్ల రెండు ముక్కలుగా విడిపోతుంది. రెండవసారి రెంటింటినీ కలిపి కోస్తే 4 ముక్కలు అవుతాయి. వాటిని బొత్తిగా పెట్టి మూడవ కోత కోస్తే 8 ముక్కలు అవుతాయి. అన్నిటిని కలిపి కోస్తే నాలుగవ కోత తరువాత 16 ముక్కలు అవుతాయి. ఐదవ కోత తరువాత 32 ముక్కలు, ఆరవ కోత తరువాత 64 ముక్కలు అవుతాయి. ఆరవ కోత తరువాతనే 64 వేరు వేరు చిన్న చదరాలుగా విడిపోతాయి.



94వ బొమ్మ : కుడి నుంచి ఎడమకు

మొదటి, రెండవ మూడవ కోతల తరువాత

ఆరు కోతల వల్ల నిజంగానే $2^6 = 64$ ముక్కలుగా విడదీయడం సాధ్యమేనని రుజువు చెయ్యాలి ఇంక. అది కష్టం ఏమీ కాదు. ప్రతి కోత తరువాతనూ ముక్కలు సమాన భాగాలుగా విడిపోయేటట్లు చూసుకుంటే చాలు. 94వ బొమ్మలో మొదటి మూడు కోతలనూ చూపించాను.

పారిభాషిక పదజాలం

అంక గణితము	arithmetics
అంకె	digit
అంగ, మెట్టు	step
అండ వృత్తము	ellipse
అక్రమం, క్రమహీనత	disorder
అక్షాంశము	latitude
అజ్ఞాత	unknown
అనుకూల ఘటన	favourable occurrence
అనుపాత	proportional
అపునరుక్త, పునరుక్తం కాని	non-repetetive
అమరిక	arrangement
అర్ధవృత్తము	semicircle
అరాక్నిడులు, సాలీడు జాతి పురుగులు	arachnids
అష్టభుజి	octagon
ఆకృతి	figure
ఉజ్జాయింపుగా, సుమారుగా	approximately
ఉపచ్ఛాయ	penumbra
ఉప ప్రమేయము	corollary
ఉపరితలము	surface
ఉభయచరములు	amphibians
ఉమ్మడి	common
ఎర్ర కణము	red corpuscle
కనిష్ఠ	minimum
కనిష్ఠ సామాన్య గుణిజం (క.సా.గు.)	l.c.m.
కర్ణము	hypotenuse
కీటకము	insect
కోణము	angle

క్షేత్రగణితము	geometry
క్రమం	order
ఖగోళశాస్త్రం	astronomy
గణితశాస్త్రం	mathematics
గణిత శాస్త్రజ్ఞుడు	mathematician
గరిష్ఠ	maximum
గ్రహం	planet
ఘటన	occurrence
ఘనపరిమాణము	volume
ఘనము, క్యూబు	cube
ఘాతము, పవరు	power
చతురస్రము, చదరము, వర్గము	square
చతురస్రీకరణము	squaring
చాపము	arc
చిక్కు ప్రశ్న, పజిలు	puzzle
చుట్టుకొలత, పరిధి	circumference
జలప్రళయం	deluge
జ్యా	chord
టేపు	tape
తమాషా	trick
తుల్యత్వం	similarity
త్రిభుజం	triangle
దీర్ఘచతురస్రం	rectangle
ధ్రువం	pole
నక్షత్రదినం	sidereal day
నమూనా	model
నిష్పత్తి	ratio
నెలవంక	crescent
పనిముట్టు	instrument
పరిపూర్ణ ఛాయ	perfect shadow
పరిమాణము, సైజు	size
పళ్ళచక్రం	cog-wheel
పునరుక్త	repetetive
పూర్ణాంకము	integer

పీఠము	base
ప్రతిలోమ, విలోమ	reverse
ప్రమాణం, యూనిట్లు	unit
ప్లగ్గు	plug
ఫాక్టోరియల్	factorial
ఫార్ములా	formula
బంధిత ఆకృతి	closed figure
బహుభుజి	polygon
బిందువు	point
బీజగణితం	algebra
భిన్నము	fraction
భిన్నాంకము	fractional number
భూగోళము	globe
భూతద్దం	lens
భూమధ్యరేఖ	equator
మాజిక్కు చదరము	magic square
మానము, స్కేలు	scale
రాక్షసి సంఖ్యలు	giant numbers
రేఖాంశము	longitude
లంబకోణము, సమకోణము	rightangle
లంబము	perpendicular
లబ్ధము	product
లాగరిథమ్	logarithm
వృత్తము	circle
వ్యాసము	diameter
వ్యాసాభిముఖంగా	diametrically opposite
వ్యాసార్ధము	radius
విభక్తము	quotient
వివరణ	explanation
వివరించు, విశదీకరించు	explain
విస్థాపన	displacement
వైశాల్యము	area
శీర్షము	vertex
శేషము	remainder

శ్రేణి	progression
షడ్భుజి	hexagon
సంఖ్య	number
సంగత	corresponding
సందర్శభ్రమ	perspective
సంభావ్యత	probability
సంవేదన	sensitivity
సగటు, సరాసరి	average
సమ అష్టభుజి	regular octagon
సమ చతుర్భుజం, రాంబస్	rhombus
సమతలం	plane
సమద్విబాహు త్రిభుజం	isosceles triangle
సమస్య	problem
సమాంతర శ్రేణి	arithmetic progression
సమీకరణం	equation
సరళరేఖ, ఋజురేఖ	straight line
సరీసృపము	reptile
సస్తనజీవి	mammal
సాధ్య ఘటన	possible occurrence
సాధించుట, సాల్వుచేయుట	solve
సామాన్య	general
సింపుల్, సామాన్యమైన	simple
సిద్ధాంతం	theory
సిలిండరు	cylinder
సూక్ష్మీకరణ	simplification
సూత్రం, రూలు	rule
సొల్యూషను, పరిష్కారం	solution
సౌరదినం	solar day

ఈ పుస్తకం చదివి ఆనందించ గలగడానికి సామాన్య గణిత పరిజ్ఞానమూ, కొద్దిగా క్షేత్ర గణిత ప్రవేశమూ చాలు. బీజ గణిత సమీకరణాలకు సంబంధించిన లెక్కలు ఇందులో బహు కొద్ది. అయినా అవి చాలా సులభమైనవి. విషయ సూచికను చూస్తే, ఈ పుస్తకంలోని పాఠ్య వైవిధ్యం బోధపడుతుంది. చిక్కు ప్రశ్నలు, గణితంలో తమాషాల దగ్గర నుంచి కొలతలు, తూనికలు లెక్కించడంలో సులభ మార్గాల వరకూ ఇందులో కనిపిస్తాయి.

నవతెలంగాణ పబ్లిషింగ్ హౌస్